

T1. 열 산화 (Thermal oxidation) — 풀이

A1. 스칼라 복소 진폭에 대한 주어진 방정식계는 매질 경계면의 임의의 점에서 성립해야 한다:

$$\forall y \quad E_y(x = -0) = E_y(x = +0); \quad \begin{cases} E_y(x = -0) = f \cdot e^{-ik_{1y}y}, & f \neq f(y), \\ E_y(x = +0) = g \cdot e^{-ik_{2y}y}, & g \neq g(y). \end{cases}$$

이로부터 필연적으로 $k_{1y} = k_{2y}$ 가 따라 나온다. 마찬가지로 두 번째 경계를 고려하면 $k_{2y} = k_{3y}$ 를 얻는다.

A2. k 에 대한 표현과 $k_y = k_{1y} = k_{2y} = k_{3y}$ 의 등식을 이용하여:

$$k = \sqrt{k_{1x}^2 + k_y^2} \Rightarrow k_{1x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} - k_y^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \omega}{c} \cos \theta_1.$$

마찬가지로,

$$k_{2x} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \omega}{c} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_1}, \quad k_{3x} = \frac{\sqrt{\varepsilon_3} \omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \sin^2 \theta_1}.$$

$$k_{1x} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \omega}{c} \cos \theta_1, \quad k_{2x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}, \quad k_{3x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}$$

A3. $x = 0$ 으로 두고, 경계 1-2 에 대해 E 와 B 의 접선 성분에 대한 경계 조건을 각각 적으면:

$$\mathcal{E} + r\mathcal{E} = a\mathcal{E} + b\mathcal{E}, \quad k_{1x}\mathcal{E} - k_{1x}\mathcal{E}r = k_{2x}a\mathcal{E} - k_{2x}b\mathcal{E}.$$

경계 2-3 에 대해:

$$a\mathcal{E}e^{ik_{2x}d} + b\mathcal{E}e^{-ik_{2x}d} = t\mathcal{E}, \quad k_{3x}t\mathcal{E} = k_{2x}\mathcal{E}ae^{ik_{2x}d} - k_{2x}\mathcal{E}be^{-ik_{2x}d}.$$

따라서, $\varphi = k_{2x}d$ 라는 표기를 도입하면 다음 방정식계를 얻는다:

$$\begin{cases} 1 + r = a + b, \\ k_{1x}(1 - r) = k_{2x}(a - b), \\ ae^{ik_{2x}d} + be^{-ik_{2x}d} = t, \\ k_{3x}t = k_{2x}(ae^{ik_{2x}d} - be^{-ik_{2x}d}). \end{cases}$$

A4. A3 으로부터:

$$\begin{cases} t = (ae^{i\varphi} - be^{-i\varphi}) \frac{k_{2x}}{k_{3x}}, \\ a = be^{-2i\varphi} \cdot \frac{k_{2x} + k_{3x}}{k_{2x} - k_{3x}}, \\ a(k_{1x} + k_{2x}) + b(k_{1x} - k_{2x}) = 2k_{1x}, \\ r = \frac{a(k_{1x} - k_{2x}) + b(k_{1x} + k_{2x})}{2k_{1x}}. \end{cases}$$

풀면 다음 결과에 이른다:

$$r_s = \frac{(k_{1x} - k_{2x})(k_{2x} + k_{3x}) + (k_{1x} + k_{2x})(k_{2x} - k_{3x})e^{2i\varphi}}{(k_{1x} - k_{2x})(k_{2x} - k_{3x})e^{2i\varphi} + (k_{1x} + k_{2x})(k_{2x} + k_{3x})}.$$

다음 표기를 도입하면

$$A = \frac{k_{2x} + k_{3x}}{k_{2x} - k_{3x}}, \quad B = \frac{k_{1x} + k_{2x}}{k_{1x} - k_{2x}}$$

요구된 형태로 정리된 표현을 얻는다.

A5. 마찬가지로, EM 파에서 전기장과 자기장의 관계 $\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} E = B$ 를 고려하여 A3 과 같이 두 계면에서의 조건을 적으면:

$$\begin{cases} 1 + r = a + b, \\ \frac{k_{1x}}{\varepsilon_1}(1 - r) = \frac{k_{2x}}{\varepsilon_2}(a - b), \\ ae^{ik_{2x}d} + be^{-ik_{2x}d} = t, \\ \frac{k_{3x}}{\varepsilon_3}t = \frac{k_{2x}}{\varepsilon_2}(ae^{ik_{2x}d} - be^{-ik_{2x}d}). \end{cases}$$

즉, 문제에서 제안된 치환을 고려하면:

$$\begin{cases} 1 + r = a + b, \\ \kappa_{1x}(1 - r) = \kappa_{2x}(a - b), \\ ae^{i\varphi} + be^{-i\varphi} = t, \\ \kappa_{3x}t = \kappa_{2x}(ae^{i\varphi} - be^{-i\varphi}) \end{cases}$$

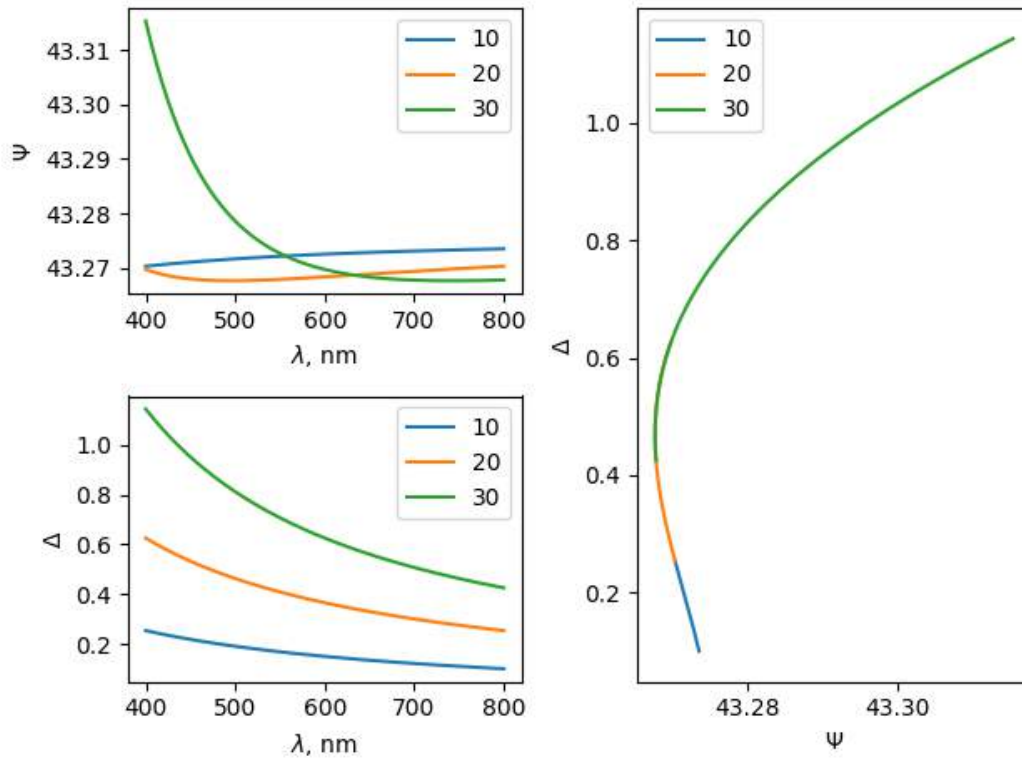
A6. A5 의 방정식계는 $\kappa_{ix} \leftrightarrow k_{ix}$ 의 치환을 통해 A3 의 방정식계와 일치함에 유의하라. 따라서 즉시 답을 적을 수 있다:

$$r_p = \frac{A + Be^{2i\varphi}}{AB + e^{2i\varphi}}, \quad A = \frac{\kappa_{2x} + \kappa_{3x}}{\kappa_{2x} - \kappa_{3x}}, \quad B = \frac{\kappa_{1x} + \kappa_{2x}}{\kappa_{1x} - \kappa_{2x}}$$

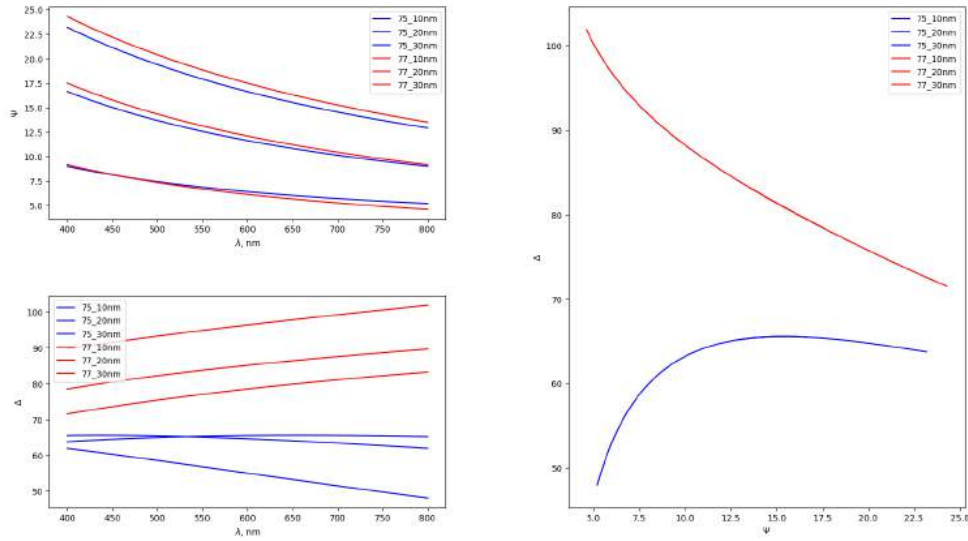
A7. 세 가지 두께 10, 20, 30 nm 에 대한 그래프를 얻는다. 낮은 입사각에서는 Ψ 의 최대 변화 폭이 100 분의 1 도 수준인 반면, $\theta \sim 70^\circ$ 에서는 Ψ 의 최대 변화 폭이 수십 도에 이른다. 최대 민감도는 다음에서 도달한다:

$$\theta_{\text{opt}} = 77^\circ$$

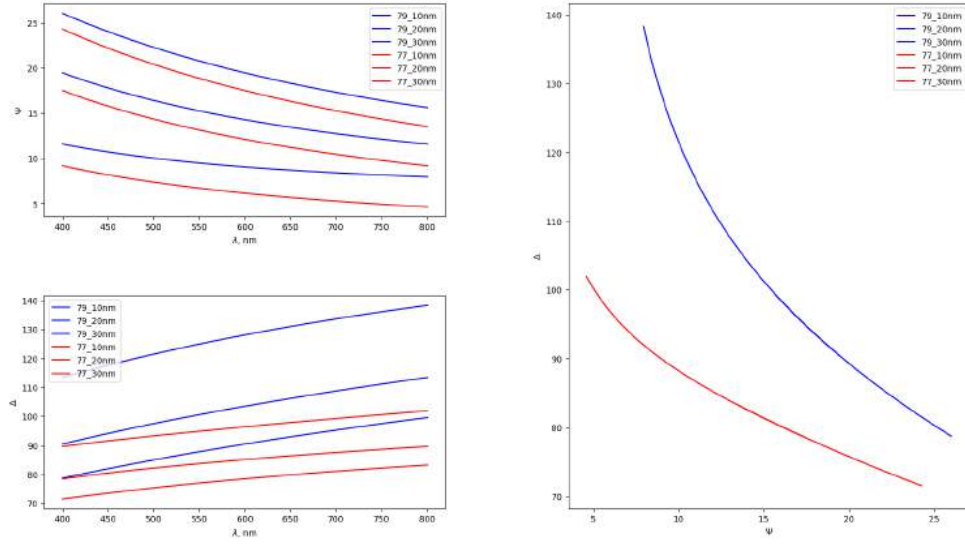
비교를 위한 해당 그래프를 아래에 제시한다.



입사각 20° , 막 두께 10 nm , 20 nm , 30 nm 에 대한 의존성.



입사각 75° 와 77° , 막 두께 10 nm , 20 nm , 30 nm 에 대한 의존성의 비교.

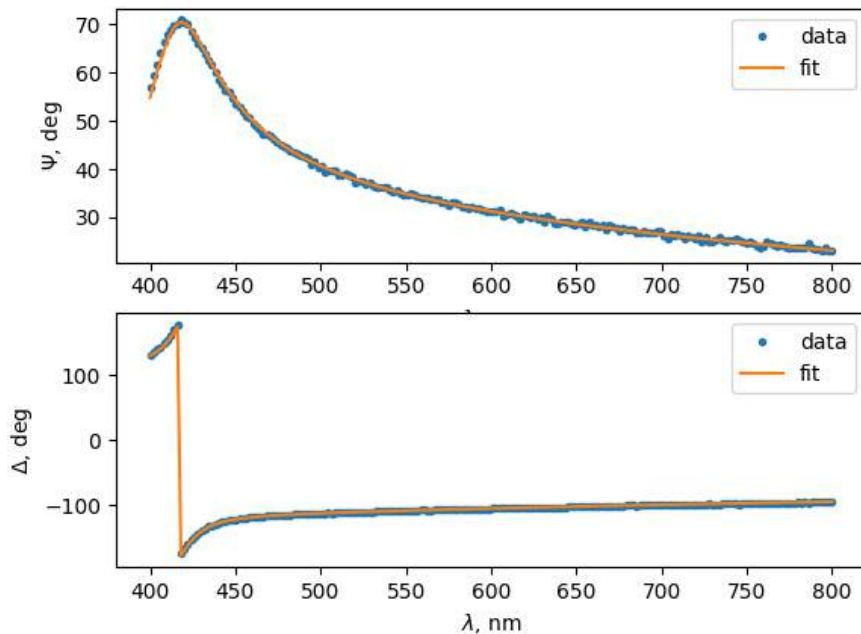


입사각 77° 와 79°, 막 두께 10 nm, 20 nm, 30 nm 에 대한 의존성의 비교.

$$\theta_{\text{opt}} = 77^\circ$$

B1. 최적의 Φ 와 d 를 찾는 알고리즘을 설명하자. 먼저 B1.py 에 임의의 Φ 와 d 를 입력한다. 다음으로 각 단계에서 Φ 나 d 를 조금씩 변화시키고, 프로그램 B1.py 가 출력하는 “오차 (error)” 를 살펴본다. 오차가 감소하면 같은 방향으로 Φ 나 d 를 계속 변화시킨다 (예: Φ 를 1° 낮추었을 때 오차가 감소하였다면, 다음 단계에서도 Φ 를 1° 낮춘다). 마침내, 어떤 작은 변화도 오차의 증가를 초래하는 Φ 와 d 에 도달하게 된다. 즉 가능한 최소 오차에 도달하는 것이며, 이는 우리가 최적의 Φ 와 d 를 찾았음을 의미한다.

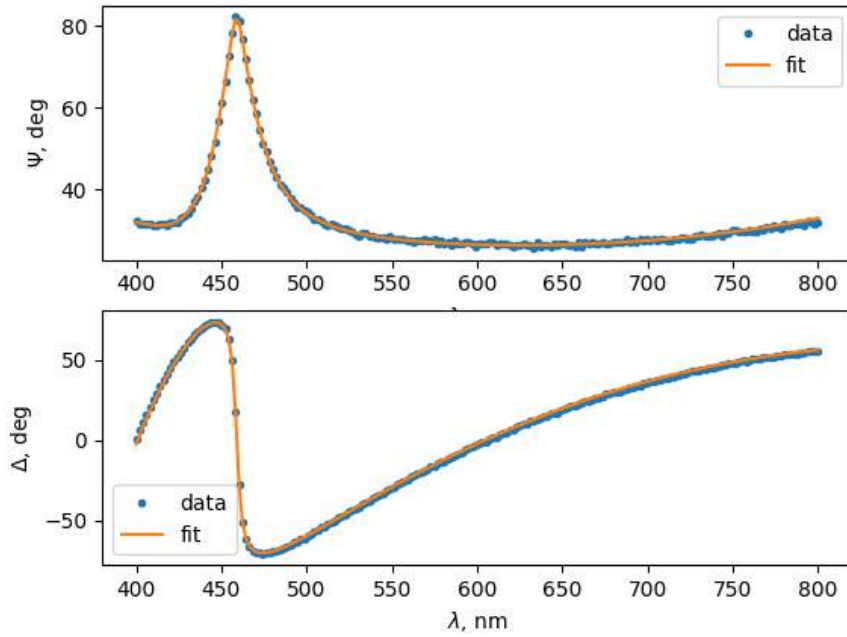
그래프에서 피팅 데이터가 동료의 데이터와 어떻게 일치하는지 볼 수 있지만, 근사 품질의 수치적 매개변수는 프로그램 B1.py 가 출력하는 오차이다.



$\Phi = 71^\circ$, $d = 67 \text{ nm}$ 에 대한 그래프.

$\Phi = 71.1^\circ$	$d = 66.7 \text{ nm}$
---------------------	-----------------------

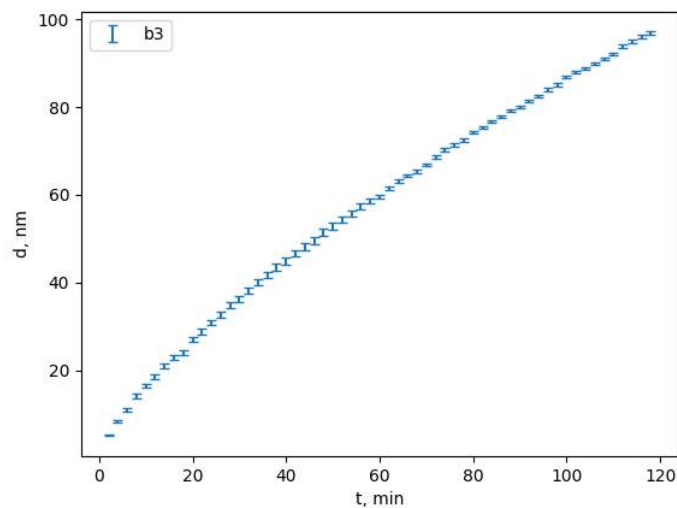
B2. 최적의 Φ 와 d 를 찾는 알고리즘은 파트 B1 의 것과 일치한다.



$\Phi = 57^\circ$, $d = 232 \text{ nm}$ 에 대한 그래프.

$\Phi = 57^\circ$	$d = 232 \text{ nm}$
-------------------	----------------------

B3. B_in.txt 에 name = b3, Phi = 77, $T = 1000$, tmax = 120 으로 설정한 후 gen_data.exe 와 B.py 를 순차적으로 실행한다. “res” 폴더에서 원하는 그래프가 담긴 파일을 얻는다. 실험의 품질을 높이기 위해 A7 에서 얻은 $\Phi = \theta_{\text{opt}}$ 를 대입함에 유의하라.



B4. 작은 시간 구간 Δt 와 면적 S 인 SiO_2 -Si 경계의 일부를 고려하자. 그러면 Δt 동안 산화된 Si 의 질량은 $\Delta m = F_3 \Delta t S \mu_{\text{SiO}_2}$ 이다. 한편, SiO_2 -Si 경계는 $v \Delta t$ 만큼 이동하므로 생성된 SiO_2 의 질량은 $\Delta m = \rho_{\text{SiO}_2} S v \Delta t$ 이다. 따라서 $\rho_{\text{SiO}_2} v S \Delta t = F_3 \Delta t S \mu_{\text{SiO}_2}$ 이고, $\rho_{\text{SiO}_2} v = F_3 \mu_{\text{SiO}_2}$ 이다.

$$v = F_3 \frac{\mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}}$$

B5. 정상 조건으로부터 $F_1 = F_2 = F_3$, 즉 $h(C^* - C_0) = \frac{D}{d}(C_0 - C_i) = kC_i$ 이다. 두 번째 등식에 서 $C_0 = (1 + \frac{kd}{D})C_i$ 를 얻는다. 이를 $h(C^* - C_0) = kC_i$ 에 대입하면 $h(C^* - (1 + \frac{kd}{D})C_i) = kC_i$, 즉 $C^* = (\frac{k}{h} + \frac{kd}{D} + 1)C_i$ 가 되어

$$C_0 = C^* \frac{1 + \frac{kd}{D}}{1 + \frac{k}{h} + \frac{kd}{D}}, \quad C_i = C^* \frac{1}{1 + \frac{k}{h} + \frac{kd}{D}}$$

B6. B4 로부터 $v = \dot{d} = \frac{F_3 \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} = \frac{kC_i \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}}$ 이다. B5 에서 얻은 C_i 의 표현을 고려하면

$$\dot{d} = \frac{C^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{h} + \frac{d}{D}}$$

또는 동등하게,

$$\frac{\dot{d} \cdot d}{D} + \dot{d} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right) - \frac{C^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} = 0.$$

좌변은 다음과 같음에 유의하라:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{2D} + d \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right) - t \cdot \frac{C^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \right) = 0$$

따라서

$$\frac{d^2}{2D} + d \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right) - t \cdot \frac{C^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} = \text{const}$$

여기서 const 는 초기 조건 $d(t_0) = d_0$ 로부터 구할 수 있다. 즉,

$$\text{const} = \frac{d_0^2}{2D} + d_0 \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right) - t_0 \cdot \frac{C^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}}$$

그러므로

$$d^2 + 2D \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right) \cdot d = \frac{2DC^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} (t + \tau)$$

여기서 $\tau = \frac{\text{const} \cdot \rho_{\text{SiO}_2}}{2DC^* \mu_{\text{SiO}_2}}$ 이다.

$$A = 2D \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right), \quad B = \frac{2DC^* \mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}}$$

B7. 먼저 B7.py 에 필요한 데이터를 생성한다. B_in.txt 에 T , $\Phi = \theta_{\text{opt}} = 77^\circ$, $t_{\text{max}} = 120$ 으로 설정한 후 gen_data.exe 와 B.py 를 실행하고, 마지막으로 B7.py 를 다섯 번 실행하면서 매번 B_in.txt 의 name, T , Φ 를 입력한다. B7.py 의 각 출력을 파일 B8_in.txt 에 기록하면 아래 표를 얻는다.

$T = 850^\circ\text{C}$ 에서도 “Final layer is too thin to approximate” 오류가 발생하고, $T = 900^\circ\text{C}$ 에서는 오차율이 너무 높으므로, $T = 950^\circ\text{C}$ 부터 50°C 간격으로 시작하는 것이 합리적임에 유의하라.

$T, ^\circ\text{C}$	$B, \text{nm}^2/\text{min}$	$\Delta B, \text{nm}^2/\text{min}$	$B/A, \text{nm}/\text{min}$	$\Delta(B/A), \text{nm}/\text{min}$
950	85	6	0.780	0.044
1000	160	6	1.017	0.027
1050	251	4	2.310	0.044
1100	389	2	4.636	0.070
1150	551	4	7.751	0.188

B8. 먼저 프로그램 B8.py 를 이용하여 그래프 $\ln B \left(\frac{1}{T} \right)$ 와 $\ln \frac{B}{A} \left(\frac{1}{T} \right)$ 를 그린다. 콘솔에서 제안된 선형 근사의 기울기를 볼 수 있다. 즉, $\ln B \left(\frac{1}{T} \right)$ 의 기울기 계수는 $-(14671 \pm 625) \text{ K}$ 이고, $\ln \frac{B}{A} \left(\frac{1}{T} \right)$ 의 기울기 계수는 $-(23418 \pm 1730) \text{ K}$ 이다 (여기서 K 는 1 켈빈을 의미).

B6 으로부터 다음을 얻는다:

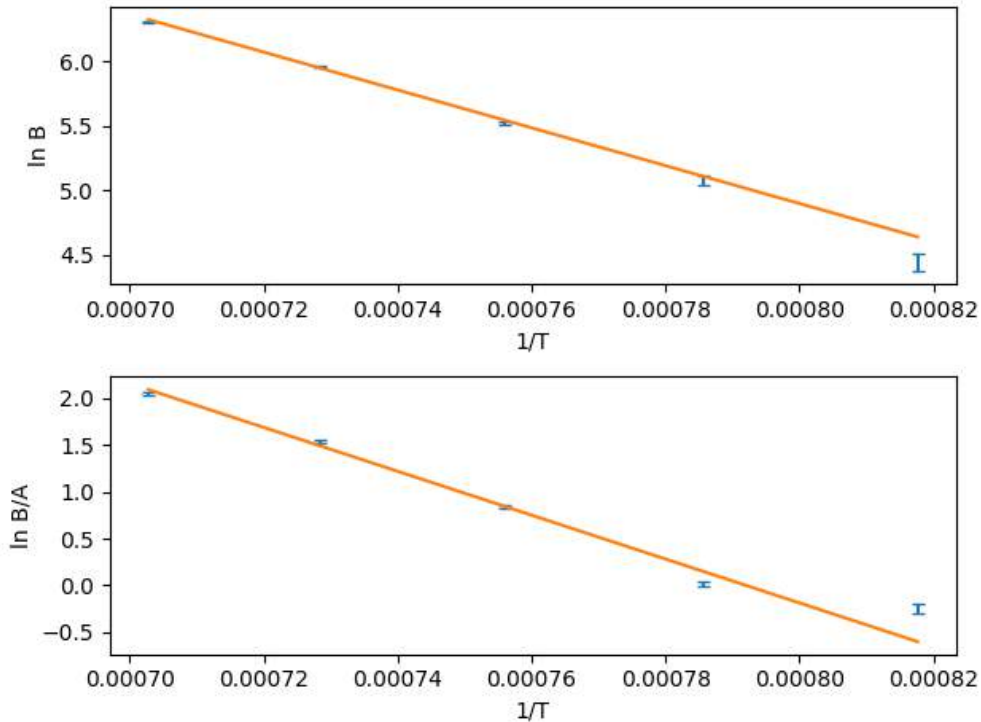
$$B = 2DC^* \frac{\mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \propto e^{-\frac{\Delta E_a}{k_B T}}$$

따라서 그래프 $\ln B \left(\frac{1}{T} \right)$ 의 기울기 계수는 $-\frac{\Delta E_a}{k_B}$ 와 같다. 그러므로 $\Delta E_a = (2.208 \pm 0.086) \cdot 10^{-19} \text{ J}$, 또는 동등하게,

$$\Delta E_a = \frac{(2.208 \pm 0.086) \cdot 10^{-19}}{1.60 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = (1.38 \pm 0.05) \text{ eV}$$

다음으로, $h \gg k$ 이면 $A \approx \frac{2D}{k}$ 이므로,

$$\frac{B}{A} \approx kC^* \frac{\mu_{\text{SiO}_2}}{\rho_{\text{SiO}_2}} \propto e^{-\frac{\Delta E_b}{k_B T}}$$



그래프 $\ln \frac{B}{A} \left(\frac{1}{T} \right)$ 의 기울기 계수는 $-\frac{\Delta E_b}{k_B}$ 와 같다. 그러므로 $\Delta E_b = (3.23 \pm 0.23) \cdot 10^{-19} \text{ J}$, 또는 동등하게,

$$\Delta E_b = \frac{(3.23 \pm 0.23) \cdot 10^{-19}}{1.60 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = (2.02 \pm 0.14) \text{ eV}$$

$\Delta E_a = (1.38 \pm 0.05) \text{ eV}, \quad \Delta E_b = (2.02 \pm 0.14) \text{ eV}$
--

T2. 멤리스터와 NVRAM (Memristors and NVRAM) — 풀이

A1. 두 번째 Williams–Strukov 방정식에 $I = U/R(x)$ 를 대입하면 다음을 얻는다:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{U}{\beta R_{\text{off}}} \frac{1}{1 + (r-1)x} - \alpha x}$$

A2. x 의 정상값 (stationary value) 은 방정식

$$\frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{U}{\beta R_{\text{off}}} \frac{1}{1 + (r-1)|x|} = \alpha x$$

을 풀어 구할 수 있다. 큰 U 의 극한에서 정상값 x 도 커지므로 분모의 1 을 무시할 수 있다. 이로부터:

$$x^2 = \frac{U}{\alpha \beta R_{\text{off}}(r-1)} = \frac{U\xi}{\alpha(r-1)^2} \implies$$

$$\boxed{x_0 = \frac{9}{10(r-1)} \sqrt{\frac{U\xi}{\alpha}}}$$

A3. 큰 U 의 극한에서 A1 의 방정식은 다음 형태로 다시 쓸 수 있다:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U}{\beta R_{\text{off}}(r-1)} \frac{1}{x} - \alpha x$$

$y = \frac{\alpha \beta (r-1) R_{\text{off}}}{U} x^2$ 로 두면 $\frac{dy}{1-y} = 2\alpha dt$ 이므로

$$2\alpha\tau = \int_0^{0.81} \frac{dy}{1-y}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\ln(100/19)}{2\alpha} \approx 0.830 \alpha^{-1}}$$

A4. 최소 에너지는 off-to-on 전환 동안의 줄 열 (Joule heat) 발산과 같다:

$$Q = \int_0^\tau \frac{U^2}{R(x(t))} dt = U^2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{(r-1)R_{\text{off}}x \left[\frac{U}{\beta(r-1)R_{\text{off}}} - \alpha x \right]}$$

$z = \sqrt{\frac{\alpha \beta (r-1) R_{\text{off}}}{U}} x$ 로 두면

$$= \frac{U^{3/2}}{R_{\text{off}} \sqrt{\alpha \xi}} \int_0^{0.9} \frac{dz}{1-z^2} \implies$$

$$\boxed{Q = \frac{U^{3/2} \operatorname{arth} 0.9}{R_{\text{off}} \sqrt{\alpha \xi}} \approx 1.47 \frac{U^{3/2}}{R_{\text{off}} \sqrt{\alpha \xi}}}$$

B1. 두 번째 Williams–Strukov 방정식에서 전류 항은 앞서 언급한 양에 대해 이미 다음 차수이므로, 전류의 0 차 근사인 $\frac{U \cos \omega t}{R_{\text{off}}}$ 를 대입할 수 있다. 따라서:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U \cos \omega t}{\beta R_{\text{off}}} - \alpha x.$$

$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ 를 대입하면 다음을 얻는다:

$$x(t) = \frac{U}{\beta R_{\text{off}}(\omega^2 + \alpha^2)} [\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t]$$

실제 전류와 0 차 값 $U(t)/R_{\text{off}}$ 사이의 차이 $\delta I(t)$ 는 다음과 같이 계산된다:

$$\delta I(t) = \frac{U \cos \omega t}{R_{\text{off}}} \left(1 - \frac{1}{1 + (r-1)x} \right) = \frac{(r-1)U^2}{\beta R_{\text{off}}^2(\omega^2 + \alpha^2)} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \cos \omega t$$

그러면:

$$\Delta I(\varphi) = |\delta I(\varphi/\omega) - \delta I(-\varphi/\omega)| = \frac{(r-1)\omega U^2}{\beta R_{\text{off}}^2(\omega^2 + \alpha^2)} |\sin 2\varphi|$$

B2. $\max_{\varphi} |\sin 2\varphi| = 1$ 이고, 0 차에서 $I_0 = U/R_{\text{off}}$ 이므로

$$s = \frac{\omega U \xi}{2(\omega^2 + \alpha^2)}$$

B3. $\frac{\omega U}{2s}$ 대 ω^2 의 의존성은 기울기 $1/\xi$, 절편 α^2/ξ 인 선형이다. 최소제곱법을 이용해 답을 구할 수 있다:

f , Hz	s , 10^{-3}	ω , rad/s	ω^2 , $10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$	$\omega U/2s$, $10^3 \text{ rad} \cdot \text{V}/\text{s}$
100	47.8	628	0.395	6.57
250	54.1	1571	2.467	14.52
500	36.7	3142	9.870	42.80

$$\frac{1}{\xi} = 3.82 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{V}^{-1}, \quad \frac{\alpha^2}{\xi} = 5.07 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \implies$$

$$\alpha = 1.15 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad \xi = 2.62 \cdot 10^2 \text{ V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

C1. A3 의 결과를 이용하면:

$$\tau = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

C2. A4 의 결과를 이용하면:

$$Q = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

D1. 평형 상태는 다음 방정식을 풀어 구할 수 있다:

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial P^2} > 0.$$

임계장을 지날 때 평형 상태 중 하나가 사라지며, 이는 도함수 $\partial W / \partial P$ 가 이 점에서 더 이상 0 을 가로지르지 않음을 의미한다. 즉 임계장에서 이 도함수는 0 에 접하기만 하므로, 이 점에서:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial P^2} = 0.$$

따라서 ($P < 0$ 임을 잊지 말 것) 평형 상태 중 하나가 사라지는 점은 다음과 같다:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial P} = -2aP + 4bP^3 - E = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial P^2} = -2a + 12bP^2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\boxed{P_{\text{cr}} = -\sqrt{\frac{a}{6b}}, \quad E_{\text{cr}} = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{2a}{3b}}}$$

D2. 우리는 본질적으로 삼차 방정식

$$-2aP + 4bP^3 - \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{2a}{3b}} = 0$$

의 근을 찾아야 하며, 그 중복도 2 인 근 $P_{\text{cr}} = -\sqrt{a/6b}$ 를 알고 있다. 단순히 $(P - P_{\text{cr}})^2$ 로 나누면 다음을 얻는다:

$$\boxed{P_{\text{after}} = \sqrt{\frac{2a}{3b}}}$$

D3. 앞 항목들에서 얻은 표현을 대입하면:

$$\begin{aligned} Q &= W(P_{\text{cr}}) - W(P_{\text{after}}) = \\ &= -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{2a}{3b}} \left(\sqrt{\frac{2a}{3b}} + \sqrt{\frac{a}{6b}} \right) - a \left(\frac{2a}{3b} + \frac{a}{6b} \right) + b \left(\left[\frac{2a}{3b} \right]^2 + \left[\frac{a}{6b} \right]^2 \right) \implies \end{aligned}$$

$$\boxed{Q = \frac{3a^2}{4b}}$$

D4. 1 비트의 데이터를 기록하려면 일반적으로 다음 정도의 에너지가 필요하다:

$$Q_{1 \text{ bit}} = Ql^3.$$

그러면 1 TiB 전체를 기록하려면 다음이 필요하다:

$$\boxed{Q_{1 \text{ TiB}} = \frac{3 \cdot 2^{41} l^3 a^2}{b} = 6.0 \text{ J}}$$

T3. 도수 현상 (Hydraulic jump) — 풀이

A1. 운하의 가장 윗점에서 비에너지에 대한 표현을 적자. 이 점에서 액체 압력은 0 이고, 대기압은 고려하지 않는다 (이는 이후 계산에 영향을 주지 않는 상수 항을 줄 것이다). 그러면 다음을 얻는다:

$$E = \frac{v^2}{2} + gd.$$

임의의 높이 z 의 점을 계산에 사용하면, 압력은 $P = \rho g(d - z)$ 이므로 같은 값을 얻는다:

$$E = g(d - z) + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{v^2}{2} + gd.$$

흐름 속도는 부피 유량 Q 와 흐름의 단면적 $S = bd$ 로 나타낼 수 있다:

$$v = \frac{Q}{bd}.$$

최종적으로 다음을 얻는다:

$$E = \frac{Q^2}{2b^2d^2} + gd$$

A2. 최소값을 찾기 위해 E 의 표현을 d 로 미분한다:

$$\frac{\partial E}{\partial d} = -\frac{Q^2}{b^2d^3} + g = 0,$$

따라서

$$d_c = \left(\frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

A3. 구한 깊이 값을 v 의 식에 대입하자:

$$v_c = \frac{Q}{bd_c} = \frac{Q}{b(Q^2/gb^2)^{1/3}} = \left(\frac{gQ}{b} \right)^{1/3}.$$

프루드 수에 대해서는 다음을 얻는다:

$$Fr_c = \frac{v_c}{\sqrt{gd_c}} = \frac{(gQ/b)^{1/3}}{\sqrt{g(Q^2/gb^2)^{1/3}}} = 1.$$

$$v_c = \left(\frac{gQ}{b} \right)^{1/3}, \quad Fr_c = 1$$

A4. 운하의 임의 단면을 통한 물의 유량은 같으므로:

$$Q = bd_1v_1 = bd_2v_2, \quad v_1d_1 = v_2d_2.$$

표면 위를 흐르는 유체에 대한 베르누이 방정식으로부터

$$\frac{v_1^2}{2} + gd_1 = \frac{v_2^2}{2} + g(d_2 + H).$$

여기서 운하의 두 번째 부분에서 액체 표면의 높이가 $d_2 + H$ 임이 고려되었다. 과제 A1 에서 보였듯이, 어떤 깊이에서도 같은 값이 얻어질 것이다.

$$v_1d_1 = v_2d_2, \quad \frac{v_1^2}{2} + gd_1 = \frac{v_2^2}{2} + g(d_2 + H)$$

A5. 깊이와 속도의 변화가 작으므로, 유량 보존 조건을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$d_2 = d_1 \frac{v_1}{v_2} = d_1 \frac{1}{1 + \Delta v/v_1} \approx d_1 \left(1 - \frac{\Delta v}{v_1}\right).$$

이 결과를 베르누이 방정식에 대입하자:

$$\frac{v_1^2}{2} + gd_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \Delta v)^2 + gd_1 \left(1 - \frac{\Delta v}{v_1}\right) + gH.$$

Δv 의 1 차까지 전개하고 같은 항을 정리하면 다음을 얻는다:

$$v_1\Delta v - \frac{gd_1}{v_1}\Delta v + gH = 0,$$

따라서

$$\Delta v = \frac{gHv_1}{gd_1 - v_1^2}.$$

그러면 흐름 깊이의 변화는

$$\Delta d = -d_1 \frac{\Delta v}{v_1} = -\frac{gHd_1}{gd_1 - v_1^2}.$$

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{gH}{gd_1 - v_1^2}, \quad \frac{\Delta d}{d_1} = -\frac{gH}{gd_1 - v_1^2}$$

A6. 앞 항목의 답으로부터, $v_1^2 < gd_1$ 일 때, 즉 $Fr_1 < 1$ 일 때 흐름 속도가 증가하고, $Fr_1 > 1$ 일 때 감소함이 따라 나온다. 임계 흐름 $Fr_1 = 1$ 인 경우 1 차에서 속도 변화가 무한대로 발산한다.

$$Fr < 1 \text{ 일 때 속도 증가, } Fr > 1 \text{ 일 때 속도 감소}$$

B1. 바닥에서 높이 z 인 곳의 압력은 $P = \rho g(d_1 - z)$ 이다 (도수 전 계의 왼쪽 부분에서). 왼쪽에서 선택한 영역에 작용하는 힘은 적분으로 구할 수 있다:

$$F_1 = \int_0^{d_1} Pb \, dz = \int_0^{d_1} \rho g(d_1 - z)b \, dz = \frac{1}{2}\rho gbd_1^2.$$

마찬가지로 오른쪽에 작용하는 힘은

$$F_2 = \frac{1}{2}\rho gbd_2^2.$$

두 힘은 반대 방향으로 작용하므로 총 힘은 이 둘의 차와 같다. 오른쪽으로 작용하면 힘을 양으로 간주한다.

$$F = \frac{1}{2} \rho g b (d_1^2 - d_2^2)$$

B2. 유량 보존 조건은 앞 파트와 정확히 같다:

$$v_1 d_1 = v_2 d_2.$$

시간 dt 동안 흐름의 임의 단면을 통과하는 유체의 질량은 $dm = \rho Q dt = \rho b d_1 v_1 dt = \rho b d_2 v_2 dt$ 이다. 그러면 영역으로 들어오는 유체의 운동량은

$$dp_1 = dm v_1 = \rho b d_1 v_1^2 dt,$$

나가는 유체의 운동량은

$$dp_2 = dm v_2 = \rho b d_2 v_2^2 dt.$$

운동량의 변화는 계에 작용하는 힘에 기인하므로

$$dp_2 - dp_1 = F dt,$$

따라서

$$\rho b (d_2 v_2^2 - d_1 v_1^2) dt = \frac{1}{2} \rho g b (d_1^2 - d_2^2) dt.$$

공통 인수를 줄이고 항을 재배열하면 다음을 얻는다:

$$v_1 d_1 = v_2 d_2, \quad v_1^2 d_1 + \frac{g}{2} d_1^2 = v_2^2 d_2 + \frac{g}{2} d_2^2$$

B3. 유량 보존 조건으로부터 도수 후 유체의 속도를 소거하자:

$$v_2 = v_1 \frac{d_1}{d_2},$$

그러면 두 번째 방정식은 다음 형태가 된다:

$$\frac{g}{2} d_2^2 + v_1^2 \frac{d_1^2}{d_2} = \frac{g}{2} d_1^2 + v_1^2 d_1.$$

d_2 를 곱한 후 이 방정식은 d_2 에 대한 삼차 방정식으로 정리된다. 그러나 한 해 $d_2 = d_1$ 은 알려져 있으며, 이는 도수가 없고 유체 흐름이 변하지 않은 경우에 대응한다. 이를 통해 공통 인수 $d_2 - d_1$ 을 분리하여 문제를 이차 방정식으로 환원할 수 있다:

$$\frac{g}{2} d_2 (d_2^2 - d_1^2) + v_1^2 (d_1^2 - d_1 d_2) = 0,$$

$$\frac{g}{2} d_2 (d_2 + d_1) (d_2 - d_1) - v_1^2 d_1 (d_2 - d_1) = 0,$$

$$(d_2 - d_1) \left[\frac{g}{2} (d_2^2 + d_1 d_2) - v_1^2 d_1 \right] = 0.$$

$d_1 = d_2$ 인 해에는 관심이 없으므로 인수 $d_2 - d_1$ 을 줄일 수 있고, 그 결과 이차 방정식

$$d_2^2 + d_1 d_2 - \frac{2d_1}{g} v_1^2 = 0$$

을 얻으며, 그 해는

$$d_2 = -\frac{d_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + \frac{8d_1 v_1^2}{g}}.$$

$d_2 > 0$ 이므로 + 부호의 해만이 적합하다. 최종적으로 다음을 얻는다:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8v_1^2}{gd_1}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1 \right)$$

B4. 속도와 깊이로 나타낸 에너지 차이는 다음 형태이다:

$$\Delta E = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(d_2 - d_1).$$

d_2 에 대한 이차 방정식으로부터

$$v_1^2 = \frac{g}{2d_1}(d_2^2 + d_1d_2) = \frac{gd_2}{2d_1}(d_1 + d_2).$$

그러면 도수 후 속도는

$$v_2^2 = v_1^2 \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{gd_1}{2d_2}(d_1 + d_2).$$

이 결과들을 에너지 변화에 대입하면 다음을 얻는다:

$$\Delta E = \frac{g}{4} \left(\frac{d_1}{d_2} - \frac{d_2}{d_1} \right) (d_1 + d_2) + g(d_2 - d_1) = \frac{g(d_1 - d_2)(d_1 + d_2)^2}{4d_1d_2} + g(d_2 - d_1) = g(d_2 - d_1) \left(1 - \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1d_2} \right).$$

정리하면 다음을 얻는다:

$$\Delta E = \frac{g(d_1 - d_2)^3}{4d_1d_2}$$

B5. 운동 과정에서 난류와 점성의 효과로 인해 에너지의 일부가 열로 전달될 수 있다. 동시에 외부 영향 없이는 에너지가 증가할 수 없다. 따라서 조건 $\Delta E < 0$ 이 성립해야 하고, 그러므로 $d_1 < d_2$, 즉 흐름의 깊이가 증가해야 하며 실제로 도수가 일어난다. 따라서 다음 부등식을 얻는다:

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1 \right) > 1,$$

이는 $\sqrt{1 + 8Fr^2} > 3$ 을 의미하므로 $Fr > 1$ 이다.

$$Fr > 1 \text{ 일 때 도수가 가능하다}$$

C1. 떨어지는 분류에서 유량은 속도와 다음 관계로 연결된다:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v,$$

따라서 분류에서 물의 속도는

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2}.$$

주어진 대로, 이 속도는 도수 전 흐름의 속도와 같다.

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0.38 \text{ m/s}$$

C2. 계의 대칭축을 중심으로 하는 반지름 r 인 원기둥을 선택하자. 이 원기둥의 옆면을 통한 유속은

$$Q = 2\pi r dv,$$

따라서 물 층의 깊이는

$$d = \frac{Q}{2\pi r v} = \frac{D^2}{8r}.$$

$$d = \frac{D^2}{8r} = 0.42 \text{ mm}$$

C3. 속도와 깊이에 대한 방정식을 이용하여 다음을 구한다:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gd}} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{Q}{D^3} \sqrt{\frac{r_c}{g}} = 6.0,$$

그러면 깊이 비는

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{1024Q^2 r_c}{\pi^2 g D^6}} - 1 \right) = 8.0.$$

$$Fr = 6.0, \quad \frac{d_2}{d_1} = 8.0$$