

T1. 다결정 확산

프로그램 사용법은 부록에 있습니다. 측정을 시작하기 전에 문제 본문과 부록을 모두 읽는 것을 권장합니다.

준비 강의에서 우리는 이미 고체 내 확산과 그 응용에 대해 논의하였다. 이 문제 또한 고체, 특히 다결정(polycrystal) 내 불순물 입자의 확산을 다룬다.

Part A. 확산 계수의 온도 의존성 (2.6점)

이 부분에서는 물질의 결정 격자(crystal lattice) 내부에서 일어나는 불순물 입자의 확산을 다룬다.

대부분의 “일반적인” 물질에서 결정 격자 내 확산 과정은 확산하는 불순물 원자가 이웃한 격자 칸 사이를 도약(jump)함으로써 일어난다. 불순물 입자는 대부분의 시간을, 불순물 입자와 격자 원자 사이의 상호작용 퍼텐셜 에너지가 최소가 되는 지점 부근에서 보낸다. 이러한 지점의 부근을 **격자간 자리(inter-nodes)**라 한다. 보통 불순물 입자의 에너지는 작으므로, 이들은 이웃한 격자간 자리 사이로만 도약할 수 있다. 이를 위해서는 최소한 E_g 만큼의 에너지 장벽을 넘어야 한다. 이 에너지 E_g 를 **활성화 에너지(activation energy)**라 한다. 통계물리학으로부터 이러한 전이가 일어날 확률이 $\exp(-E_g/kT)$ 에 비례함이 알려져 있다. 또한 이웃한 격자간 자리 사이의 도약 시간은 특성 입자 속력에 반비례해야 한다. 따라서

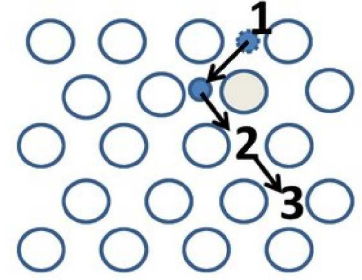


그림 1. 불순물 원자의 격자간(inter-nodal) 확산

$$D \propto v \exp(-E_g/kT),$$

여기서 v 는 불순물 입자의 열운동에 관련된 제곱평균제곱근(rms) 속력이다.

A1 v 를 T 와 물리 상수들로 표현하라. 이로부터 비례 관계 $D(T)$ 를 구하라.

0.2

A2 입자의 제곱평균제곱근 변위 Δr_{sq} , 확산 계수 D , 시뮬레이션 시간 t 가 3차원의 경우에서 서로 어떻게 관련되는지 쓰라. 참고: 무작위 행보(random walk)에서 세 축 각각에 대한 입자의 운동은 독립적이라고 볼 수 있다. 1차원의 경우 확산 계수 D 는 칸 크기 a 와 특성 도약 시간 τ 와 $D = a^2/2\tau$ 의 관계를 가진다. 참고: 만약 이 문제를 풀지 못하더라도, 이후에는 $\Delta r_{sq} = \sqrt{Dt}$ 로 간주하라.

0.4

Part A의 프로그램은 입방 격자(cubic lattice)에 대해 격자간 자리에서의 불순물 입자 운동을 시뮬레이션한다. 시뮬레이션할 입자의 수, 온도, 시뮬레이션 시간을 선택하라. 프로그램은 입자 변위의 제곱평균제곱근과 시뮬레이션들 사이의 오차를 출력한다. 모든 프로그램 입출력은 임의 단위(arbitrary units)로 이루어진다.

A2 $D(T)$ 를 구하기 위한 점들을 얻고, 얻어진 의존성을 선형화하라. 활성화 에너지 E_g 를 임의 단위로 최소 2% 이상의 정확도로 구하라. 이 정확도를 어떻게 달성하는지 명시적으로 기술하라. 측정은 $T \in [1; 10]$, $t \in [1; 10]$, $N \in [10^2; 10^4]$ 범위에서 수행하라.

2.0

문제의 나머지 부분에서는, 평평한 경계를 가지는 큰 크기의 고체를 모형화하는데, 그 표면에 많은 수의 불순물 원자가 균일하게 증착되어 있다. 시간이 지남에 따라 불순물 원자는 물질 내부로 확산한다. 시뮬레이션의 결과는, 이 입자들의 침투 깊이 z 에 따른 고체 내 불순물 입자의 농도 분포 c 이다.

Part B. 유효 확산 계수 (2.4점)

만약 모든 고체가 미시적 수준에서 완전히 균질한 물체였다면, 그 내부의 확산 문제는 자명할 것이다. 그러나 대부분의 물질은 그 구조상 많은 수의 작은 단결정(single crystal)—난알(grain)—으로 이루어져 있으며, 그 사이의 경계에서는 물질의 원자들이 무질서하게 배열되어 있다. 이 상태가 최소 에너지를

가지는 것은 아니지만, 통상적인 온도에서는 열역학적 관점에서 여전히 가장 확률이 높은 상태이다. 특히 거의 모든 금속은 본질적으로 다결정이다 (예를 들어, 이 메커니즘이 금속의 소성(plasticity)을 보장하는데, 이는 결정 격자의 일부가 서로에 대해 움직일 수 있게 하기 때문이다).

난알 경계의 원자들은 무질서하게 배열되어 있고 훨씬 더 “느슨하게” 배열되어 있으므로, 난알 경계 사이에서의 불순물 원자 이동은 단결정 격자 내부에서의 이동만큼 큰 에너지를 필요로 하지 않는다. 이 때문에 난알 경계에서의 확산 계수는 그 내부에서보다 훨씬 크며, 이는 다결정 내 확산 과정에 눈에 띄는 영향을 줄 수 있다. 이 문제의 Part B와 C의 목적은 다결정 확산 시 일어나는 현상을 탐구하는 것이다.

다결정 내 확산 과정에는 세 가지 서로 다른 영역(regime)이 있다. 이들은 각각 A, B, C형 운동학 모드(kinetic mode)라 불린다. A형 운동학 영역은 가장 큰 시간 규모에서, C형 영역은 가장 작은 규모에서 관찰된다. B형 모드는 그 사이의 중간이다. 이 문제에서는 A형과 B형 모드만 다룬다. 특성 확산 규모 $\sim \sqrt{Dt}$ 가 다결정의 난알 크기를 초과하면, “삽입된” 물질의 각 원자가 많은 수의 난알을 통과한다. 이로 인해 확산은 하나의 “전선”(front)을 이루며 진행하며, 난알 내부의 확산 계수 D , 난알 경계에서의 확산 계수 D_{gb} , 그리고 경계가 차지하는 상대 부피 δ 에 의존하는 유효 확산 계수 D_{eff} 로 특성화할 수 있다.

만약 다결정 내 난알 경계가 오직 확산 방향을 따라서만 배향되어 있다면, 유효 확산 계수는 단순히 D 와 D_{gb} 의 가중 평균과 같을 것이다:

$$D_{eff} = D + \delta(D_{gb} - D).$$

만약 경계가 확산 방향에 수직으로 배향되어 있다면, $\delta \ll 1$ 일 때 유효 확산 계수는 사실상 변하지 않을 것이다.

실제 다결정에서는 난알 경계가 임의로 배향되어 있다. 이 때문에 유효 확산 계수는 위에 주어진 척도와 다르다. 그러한 구조에서 유효 확산 계수 문제를 정확히 푸는 것은 매우 어렵고, 실제로는 극한의 경우 $\delta \ll 1$, $D_{gb}/D \gg 1$ 에서만 추정값을 줄 수 있다:

$$D_{eff}/D = 1 + \alpha\delta(D_{gb}/D - 1).$$

어떤 근사에서 α 를 추정할 뒤, 이를 실험적으로 구해 보자. α 를 추정하는 가장 쉬운 방법은 $D_{gb} = \text{const}$ 에서 $D \rightarrow 0$ 으로 두고, 어떤 간단한 3차원 다결정 구조에 대해 D_{eff} 를 구하는 것이다. 예를 들어, 두께 $\delta a/3$ 의 경계로 분리된 크기 a 의 입방 단결정들로 이루어진 다결정을 생각하자. 유효 확산 계수는 그 계의 한 축을 따른 확산 계수로 추정할 수 있다 (이는 세 축 모두에서 동일할 것이다).

B1 그러한 구조에서 계수 α 는 얼마인가?

0.4

참고: 수치 모형화로 넘어가기 위해 이 문제를 반드시 풀어야 하는 것은 아니다.

프로그램의 도움으로 이 추정의 타당성을 확인해 보자. 프로그램은 임의의 다결정 구조를 시뮬레이션한다. Part B와 C의 프로그램은 $a, D = 1$ 이고 시간 단위가 D/a^2 이 되도록 상대 단위로 입력값을 받는다. 경계에서의 확산 계수 D_{gb} , 시뮬레이션 시간 t , 경계의 상대 부피 δ 를 조정할 수 있다.

참고: 다음 항목을 수행할 때, 유효 확산 계수 D_{eff} 를 가지는 균질 결정의 경우 침투 깊이 z 에 따른 입자 농도 분포 c 가 다음 형태를 가진다는 것을 알려진 것으로 간주하라:

$$c(z) = \frac{N_0}{4\sqrt{\pi D_{eff} t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4D_{eff} t}\right).$$

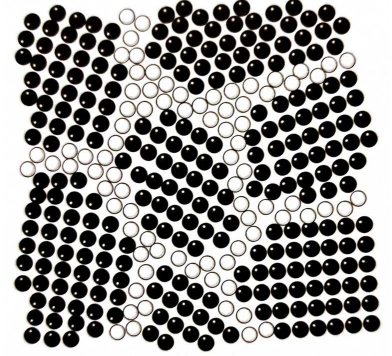


그림 2. 다결정의 특징적 구조

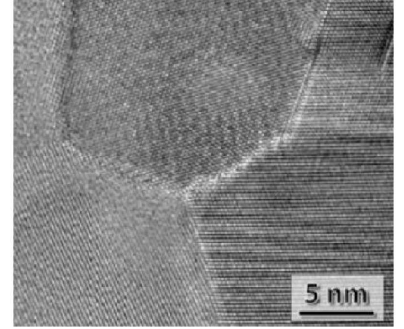


그림 3. 원자력 현미경(atomic force microscope)으로 촬영한 다결정의 영상

B2 $t \in [2; 5]$, $D_{gb}/D \in [2; 5]$, $\delta \in [0.005; 0.05]$ 범위에서 다결정 내 확산을 시뮬레이션하여 α 의 실험값을 구하라. B1의 결과와 비교하라. **2.0**

참고: 프로그램 동작의 결과로, 불순물 입자의 평균 농도의 로그 $\ln \bar{c}$ 가 침투 깊이의 제곱 z^2 에 대해 가지는 의존성이 Bavg.csv 파일에 기록된다. 이 의존성은 B.nb 프로그램으로 분석할 수 있다.

끝으로, 계수 α 가 확산이 일어나는 공간의 차원에 의존한다는 점을 언급해 둘 만하다.

Part C. B형 운동학 (5점)

문제의 앞부분에서는, 확산의 특성 규모가 다결정 내 불균질성의 크기보다 훨씬 큰 확산 유형을 다루었다. 그러나 이것이 다결정에서 관찰될 수 있는 유일한 확산 모드는 아니다. 만약 확산 규모가 다결정의 낱알 경계 너비보다는 훨씬 크고 낱알 자체의 크기보다는 훨씬 작다면, B형 운동학 확산이 일어난다.

이 확산 유형의 주된 특징은, 평균 농도의 로그 $\bar{c}$ 가 깊이 z 에 대해 2차가 아니라 $6/5$ 거듭제곱으로 의존한다는 점이다. 이 값은 해석적으로 유도된 것은 아니지만, 실험에서 매우 잘 관찰되어 그러한 의존성의 존재가 실험의 품질 지표로 사용될 정도이다! 이러한 “비해석성”에도 불구하고, 의존성 $\ln \bar{c}(z^{6/5})$ 의 매개변수들은 상당히 정밀하게 알려진 매개변수들과 함께 경험식에 포함된다. 문제의 나머지 부분은 B형 확산과 그로부터 생기는 관계식들의 연구에 할애된다.

$\ln \bar{c}(z^{6/5})$ 의 선형 의존성을 해석적으로 얻을 수는 없지만, 이 의존성의 매개변수들은 (물리적 이유로 — 무차원 변수 δ , D_{gb}/D , Dt/a^2 로부터, 여기서 a^3 은 다결정 낱알 하나의 부피이다) 문제의 입력 매개변수들로 명확하게 표현된다. 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\frac{d \ln c}{dz^{6/5}} = -C \delta^\xi a^\psi \left[\frac{D_{gb}}{D} \right]^\eta \left[\frac{Dt}{a^2} \right]^\zeta.$$

여기서 C 는 $\sim 10^0$ 정도의 수치 계수이다.

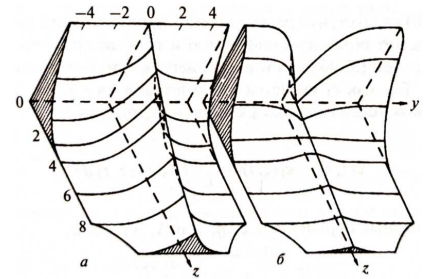


그림 4. 서로 다른 경계 조건에서의 B형 운동학 영역의 확산 농도 분포 (a – 경계에서 농도 일정, b – 계 내 입자 수 일정). 두 경우 모두에서 $\ln \bar{c}(z^{6/5})$ 의 선형 의존성이 관찰된다.

C1 수치 모형화에 의존하지 않고 이 계수들에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 사전에 결정할 수 있는 계수들의 값을 모두 구하라. **0.4**

C2 나머지 계수들을 수치 시뮬레이션으로 구하라. 측정은 $t \in [0.005; 0.200]$, $D_{gb}/D \in [5; 50]$, $\delta \in [0.02; 0.20]$ 범위에서 수행하라. 프로그램 동작의 결과로, Cavg.csv 파일에는 불순물 입자의 평균 농도의 로그 $\ln \bar{c}$ 가 침투 깊이 $z^{6/5}$ 에 대해 가지는 의존성이, Cmap.csv 파일에는 농도의 로그 $\ln c$ 가 침투 깊이 $z^{6/5}$ 와 고체 표면을 따른 y 좌표에 대해 가지는 의존성이 담긴다. 이 의존성들은 C.nb 프로그램으로 분석할 수 있다. **4.0**

C3 C 의 값을 가능한 한 정확하게 구하라. **0.6**

부록 №1

이 문제를 위한 소프트웨어는 ISPhO 폴더에 있다. 필요한 프로그램은 다음과 같다.

- A.exe
- B.exe
- C.exe
- InteractiveBuffer.nb
- B.nb
- C.nb

앞의 세 프로그램은 모형화에 사용되고, 나머지 세 프로그램은 얻어진 데이터의 시각화와 처리에 사용된다.

.exe 파일 다루기 .exe 확장자를 가진 파일들은 명령줄 인터페이스를 제공한다. 프로그램이 시작되면 일련의 입력 매개변수를 요구한다:

- A.exe는 Part A에서 사용된다. 프로그램은 시뮬레이션 시간, 결정 온도, 시뮬레이션 반복 횟수를 요구한다. 시간과 온도는 임의의 단위로 측정된다. **활성화 에너지도 같은 단위로 주어야 한다!** 반복 횟수와 시뮬레이션 시간을 늘리면 결과의 정확도가 높아지지만, 상당히 시간이 걸릴 수 있다. 먼저 이 매개변수들의 작은 값으로 시뮬레이션을 실행하는 것을 강력히 권장한다.
- B.exe는 Part B에서 사용된다. 프로그램은 시뮬레이션 시간, 다결정 낱알 경계에서의 상대 불순물 확산 계수, 경계의 상대 부피를 요구한다. 보통 시뮬레이션은 꽤 빠르다.
- C.exe는 Part C에서 사용된다. 프로그램은 같은 매개변수 집합을 받지만, 훨씬 작은 규모의 효과를 시뮬레이션하기 때문에 조금 더 시간이 걸린다. 이 부분에서는 측정을 계획하는 것이 좋을 수 있다.

모든 프로그램은 예상 시뮬레이션 시간을 표시한다. 이는 컴퓨터의 사양에 따라 실제 시뮬레이션 시간과 다를 수 있다. 생성한 .csv 파일을 삭제하거나 편집하지 마라!

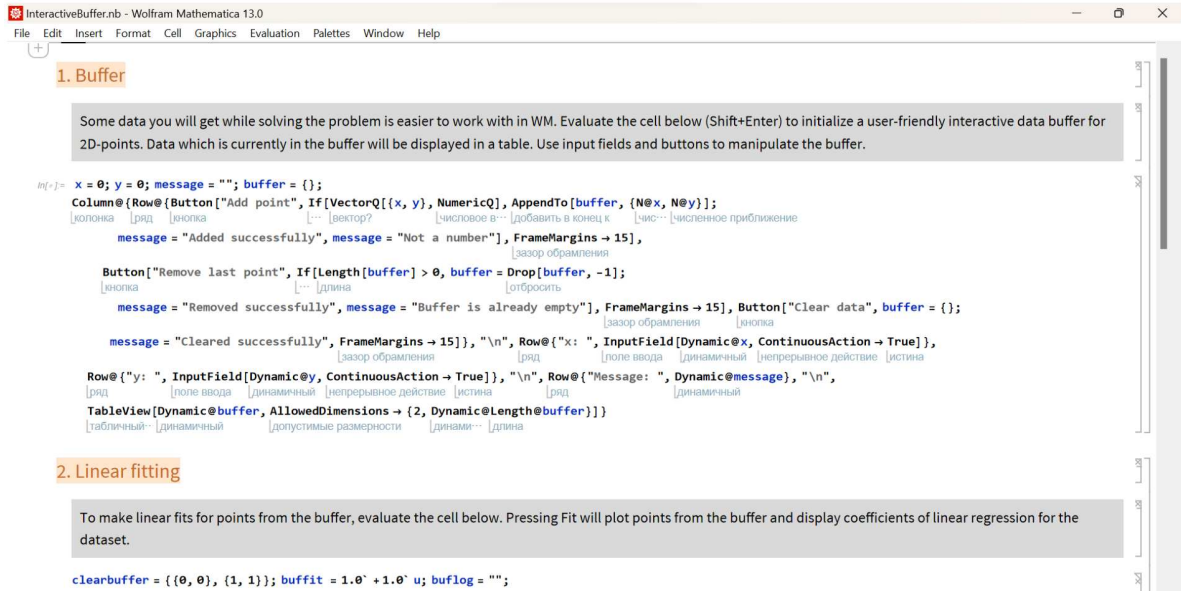
.nb 파일 다루기 결과를 빠르고 편리하게 시각화하고 처리하기 위해, Wolfram Mathematica 컴퓨터 대수 패키지를 기반으로 한 .nb 확장자 프로그램(이른바 “노트북”)을 사용한다.

- InteractiveBuffer.nb는 입력된 점들을 기억하고, 그래프로 그리며, 최소제곱법으로 직선을 긋는 간단한 프로그램이다. 이 프로그램은 문제를 풀기 위한 “응용 도구”로서 존재한다.
- B.nb는 Part B의 실제 시뮬레이션 결과를 불러와 $\ln \bar{c}(z^2)$ 로 그리고, 문제의 요구 사항에 맞게 적합(fit)시키는 도구이다.
- C.nb는 Part C의 실제 시뮬레이션 결과를 불러와 $\ln \bar{c}(z^{6/5})$ 의 의존성을 그리고, 문제의 요구 사항에 맞게 적합시키는 도구이다. 또한 다결정 낱알 경계에서의 상세한 농도 분포를 그릴 수 있게 해 준다.

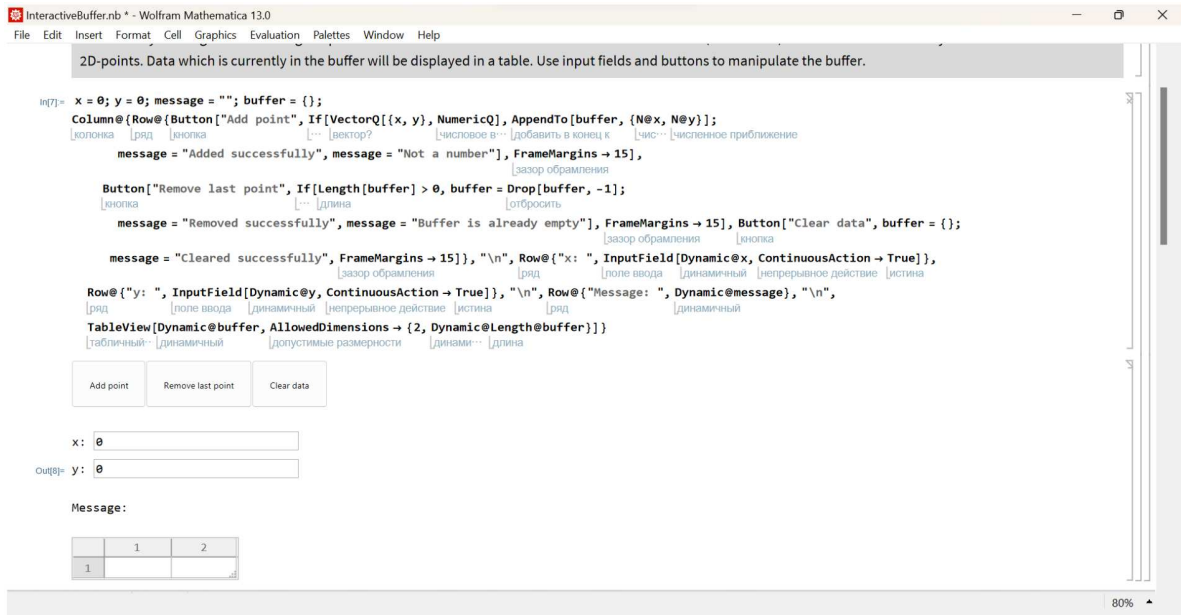
경고: .nb 파일의 소스 코드를 변경하는 것은 기술적으로 가능하지만, 강력히 권장하지 않는다! 소스 코드를 손상시키면, 초기 상태로 되돌리는 데 도움을 받을 수 없다!

부록 №2

InteractiveBuffer.nb 예시 올림피아드 참가자들이 Wolfram Mathematica로 작업하는 것을 더 쉽게 하기 위해, 이 부록에서는 프로그램 중 하나인 InteractiveBuffer.nb에 대한 단계별 안내를 제공한다. 파일을 연 후에는 그 내용이 화면에 나타나야 한다 (세부 사항은 WM 버전에 따라 다르게 보일 수 있다):



코드 셀의 아무 곳이나 클릭하고 Shift+Enter를 누르라. 이는 셀의 코드를 실행한다. 새로운 셀이 아래쪽에 나타나며 다음과 같이 보일 것이다:



이것이 문제를 풀 때 사용할 수 있는 대화형 버퍼(interactive buffer)이다. 대화형 입력 필드에 x 와 y 좌표를 입력할 수 있다. 그런 다음 Add point 버튼을 누르면, 이 값들이 버퍼에 추가된다:

x:

Out[8]= y:

Message:

	1	2
1		



x:

Out[8]= y:

Message: Added successfully

	1	2
1	1.42038	2.19878

버퍼에 잘못된 점을 추가한 경우, 프로그램은 버퍼의 마지막 점을 제거할 수 있는 기능을 제공한다. 이를 위해서는 Remove last point 버튼을 클릭하라:

x:

y:

Out[10]= Message: Added successfully

	1	2
1	0.1928	0.2651
2	1.2301	3.102
3	3.01927	10.27
4	3.01927	-10.27



x:

y:

Out[10]= Message: Removed successfully

	1	2
1	0.1928	0.2651
2	1.2301	3.102
3	3.01927	10.27

버퍼를 완전히 비우려면 Clear data를 클릭하라:

x:

y:

Out[10]= Message: Added successfully

	1	2
1	-1.2	2.2
2	1.2	3.21



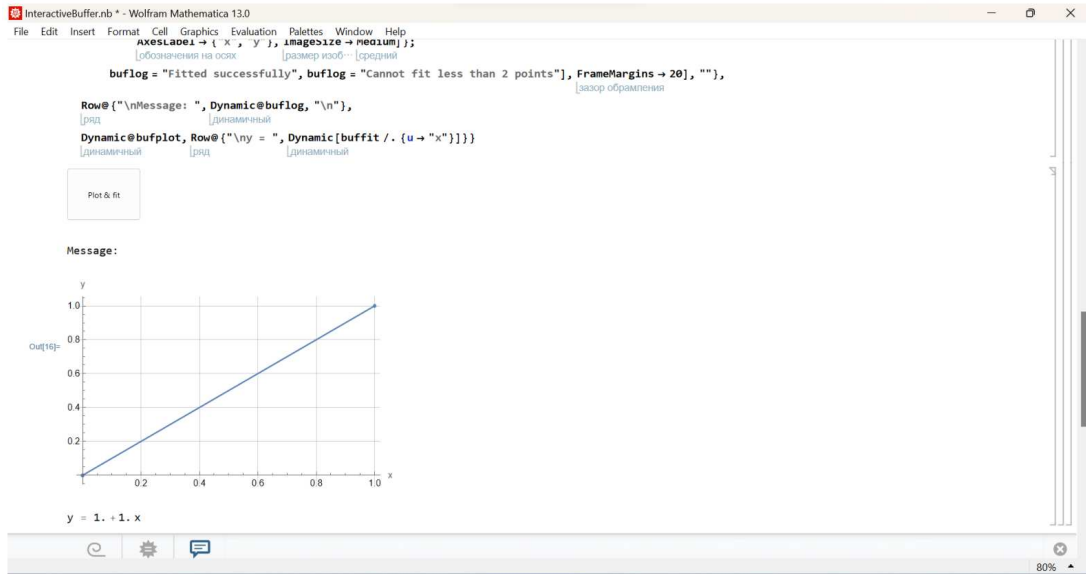
x:

Out[10]= y:

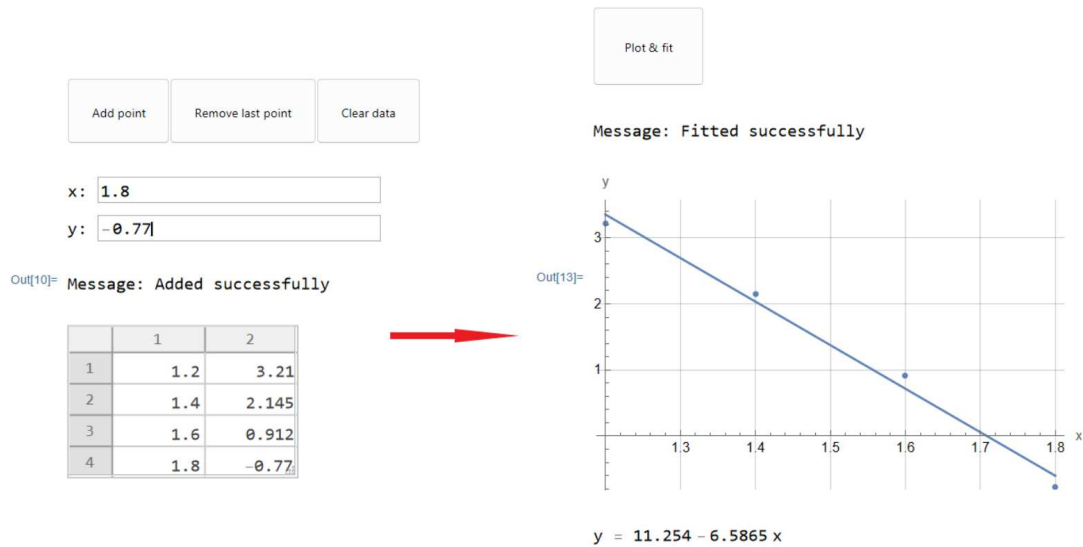
Message: Cleared successfully

	1	2
1		

버퍼를 필요한 점들로 채운 후, 두 번째 섹션의 셀을 실행하라. 결과는 다음과 같이 보일 것이다:



Plot fit 버튼을 누르면, 프로그램은 버퍼의 점들을 그리고 그에 대한 선형 회귀 계수를 계산한다. 버퍼 내용과 그에 대응하는 적합 결과의 예시:



나머지 .nb 파일들도 주석과 직관적인 인터페이스를 갖추고 유사한 방식으로 보이고 동작한다.

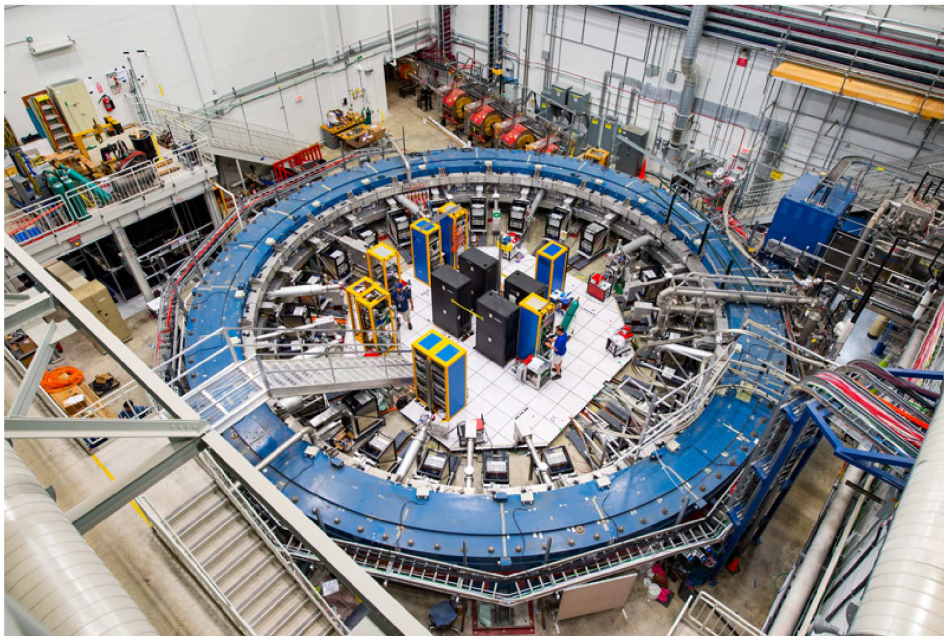
T2. 뮤온의 비정상 자기 모멘트

전자와 뮤온(muon)의 자기 모멘트 측정은 현대 물리학에서 가장 정밀한 측정 중 하나이다. 이 측정은 소립자 모형에 대한 매우 정밀한 검증을 제공한다. 실험에서는 양전하를 띤 뮤온(반뮤온(antimuon)이라고도 한다)이 사용된다. 반뮤온의 질량은 전자 질량의 약 200배이고, 반뮤온의 전하는 전자 전하의 절댓값과 같다. 문제 전체에서 간결함을 위해 양전하를 띤 뮤온을 그냥 뮤온이라 부른다.

뮤온(과 전자)은 공간 내 운동과 관련되지 않은 각운동량 $\vec{s}$ 를 가진다. 이 각운동량을 뮤온의 스핀(spin)이라 한다. 스핀의 운동은 돌림힘 방정식으로 기술할 수 있는데, 스핀 모멘트의 변화율은 가해진 돌림힘과 같다. 또한 뮤온은 자기 모멘트

$$\vec{\mu} = g_{\mu} \frac{q}{2m_{\mu}} \vec{s}$$

를 가진다. 여기서 m_{μ} 와 q 는 뮤온의 질량과 전하이고, $g_{\mu} = 2(1 + a_{\mu})$ 는 무차원 상수이다. 매개변수 a_{μ} 는 자기 모멘트가 “정상” 값($g_{\mu} = 2$ 에 해당)으로부터 벗어난 정도를 나타낸다. 이 문제는 자기 모멘트에 대한 비정상 기여 a_{μ} 를 결정하는 실험을 다룬다. 뮤온은 균일한 자기장 속에서 원을 그리며 운동하고, 그 자기 모멘트의 세차 진동수(precession frequency)가 측정된다.



뮤온 $g - 2$ 측정 실험용 저장 링(storage ring), Fermilab

입자물리학에서 에너지는 보통 전자볼트(eV) 단위로 측정된다. 입자 질량 m 대신 정지 에너지 mc^2 이 사용되며, 그 값 또한 전자볼트 단위로 측정된다. 다음 수치들을 사용할 수 있다:

- $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- 진공 중 빛의 속력 $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- 뮤온 질량 $m_{\mu}c^2 = 105.7 \text{ MeV}$
- 반뮤온 전하 $q = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- 뮤온은 불안정하며, 정지 좌표계에서의 수명은 $\tau = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

회전은 회전축을 따라 향하는 각속도 벡터 $\vec{\omega}$ 로 기술할 수 있으며, $\vec{\omega}$ 의 방향은 오른손 법칙으로 결정된다. 만약 벡터 $\vec{A}$ 가 실험실 좌표계에서 각속도 $\vec{\omega}$ 로 회전한다면, 그 시간 미분은

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}.$$

이제 기준 좌표계 B (좌표와 시간 x', y', z', t')가 실험실 기준 좌표계 A (좌표와 시간 x, y, z, t)에 대해 x 축을 따라 속도 V 로 움직인다고 하자. 이 좌표계들의 좌표는 로런츠 변환으로 관계 지어진다

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z', \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

모든 답에서 위에 정의된 γ 를 사용하여 식을 간단히 할 수 있다.

만약 움직이는 기준 좌표계 B 에서 입자의 속도가 $\vec{v}$ 이고, 좌표축에의 사영이 v'_x, v'_y, v'_z 라면, 실험실 기준 좌표계에서 그 속도 성분은

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

질량 m 인 상대론적 입자가 속도 $\vec{v}$ 로 움직일 때 에너지와 운동량은

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

입자가 힘 $\vec{F}$ 를 받아 움직이면, 운동 방정식은

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

수치 답이 필요한 문제에서는 유효숫자 세 자리까지 계산해야 한다.

Part A. 자기장 속에서의 동역학 (4.5점)

비정상 자기 모멘트 측정 실험에서 뮤온 빔이 자기장 $B = 1.450 \text{ T}$ 속에서 운동한다. 뮤온의 운동량은 자기장에 수직이며 $pc = 3.094 \text{ GeV}$ 이다. 자기장은 z 축을 따라 향한다.

A1 빔 속의 뮤온에 대해, 빛의 속력과 뮤온 속력의 차이 $\Delta v = c - v$ 를 구하라 (식을 제시하고 수치값을 계산하라). **1.0**

A2 빔 속의 뮤온에 대해, 운동 에너지 E_k , 즉 전체 에너지와 정지 에너지의 차이를 구하라 (식을 제시하고 수치값을 GeV 단위로 계산하라). **0.5**

A3 뮤온 궤도의 반지름 R 과 운동 주기 T 를 구하라. (식을 제시하고 수치값을 계산하라.) **1.0**

A4 불안정성으로 인해 뮤온은 유한한 시간 동안만 원을 돌 수 있다. 뮤온이 붕괴하기 전에 도는 회전 수 N 을 구하라. **0.8**

이제 뮤온이 앞부분과 동일한 자기장 B 속에서 정지해 있는 경우를 생각하자.

A5 스핀의 시간 미분 $d\vec{s}/dt$ 에 대한 식을 구하라. 답을 $\vec{B}, \vec{s}, g_\mu$ 및 기본 상수들로 표현하라. **0.7**

A6 뮤온 스핀의 각속도 z 성분 ω_z 를 구하라. 답을 B, g_μ 및 기본 상수들로 표현하라. **0.5**

Part B. 토머스 세차 (3.5점)

뮤온의 스핀은 그 공간적 운동과 관련되지 않으며, 뮤온이 정지해 있는 기준 좌표계(이러한 좌표계를 동행(comoving) 좌표계라 한다)에서 기술되어야 한다. 만약 뮤온이 가속도를 가지고 운동한다면, 매 순간 서로 다른 동행 기준 좌표계를 선택해야 한다. 두 번의 연속적인 로런츠 변환을 생각하자. 첫 번째 변환은 실험실 좌표계 A (좌표 x, y, t)로부터 움직이는 좌표계 B (좌표 x', y', t')로의 변환이다. 두 번째 변환은 기준 좌표계 B 로부터 세 번째 기준 좌표계 C (좌표 x'', y'', t'')로의 변환이다. 이 변환의 조합은 어떤 합성 속도를 가지는 로런츠 변환이 아님이 밝혀진다. 스핀 세차를 일으키는 추가적인 회전이 존재한다. 이 효과를 토머스 세차(Thomas precession)라 한다. 토머스 세차는 순수하게 운동학적인 현상이므로, 이를 기술하기 위해 자기 모멘트의 동역학을 고려할 필요가 없다.

기준 좌표계 B 가 A 에 대해 x 축을 따라 속도 v_x 로 움직인다고 하자. 다시 기준 좌표계 C 가 B 에 대해 y 축을 따라 속도 v'_y 로 움직인다. $v'_y \ll v_x$ 로 가정하고 v'_y 에 대해 1차까지 다룰 수 있다. 식을 간단히 하기 위해 표기 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ 를 사용할 수 있다.

B1 기준 좌표계 A 에 대한 기준 좌표계 C 의 속도 $\vec{v}_C$ 의 x, y 성분을 구하라. 답을 v_x, v'_y 로 표현하라. **0.5**

B2 기준 좌표계 C 에 대한 기준 좌표계 A 의 속도 $\vec{v}_A$ 의 x'', y'' 성분을 구하라. v''_y 가 작다는 점을 고려하라. **0.7**

B3 $\vec{v}_A \neq -\vec{v}_C$ 임이 밝혀진다. 이는 기준 좌표계 C 의 축이 좌표계 A 의 축에 대해 회전해 있다는 사실에 기인할 수 있다. 따라서 좌표계 C 의 모든 벡터 또한 좌표계 A 에 대해 회전해 있다. 벡터 $-\vec{v}_A$ 와 $\vec{v}_C$ 사이의 각으로 정의되는 회전각 $\Delta\theta$ 를 계산하라. 이 각은 z 축에서 볼 때 첫 번째 벡터로부터 두 번째 벡터로의 회전이 반시계 방향이면 양수이다. (축 x, y, z 는 오른손 좌표계를 이룬다.) 답을 $v_x, v'_y, \gamma = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}, c$ 로 표현하라. **0.6**

B4 입자가 좌표계 A 에 대해 x 축을 따라 속도 $\vec{v}$ 로 운동한다고 하자. 입자의 가속도는 y 축을 따라 향하며 그 사영은 a_y 이다. 좌표계 B 는 고려하는 순간 입자의 동행 좌표계(즉, 그 속에서 입자의 속도가 0)이고 x 축을 따라 속력 v 로 움직인다. 시간 간격 dt (실험실 기준 좌표계에서 측정) 후에 입자의 속도는 $\vec{v} + d\vec{v}$ 가 되고, 그에 대응하는 동행 기준 좌표계는 C 이다. 앞 문제로부터 동행 좌표계의 축이 회전함을 알 수 있다. 앞 문제의 결과를 이용하여, 동행 좌표계 각속도의 z 성분 ω_T (토머스 세차의 각속도)를 구하라 (이 경우 회전은 z 축을 중심으로 일어난다). 답을 v_x, a_y, γ 로 표현하라. **1.0**

B5 뮤온이 z 축을 따라 향하는 균일한 자기장 B 속에서 운동한다고 하자. 뮤온의 속도는 자기장에 수직이다. 토머스 세차 각속도의 z 성분을 계산하라. 답을 B, q, m_μ, γ 로 표현하라. **0.7**

Part C. 자기 모멘트의 세차 (2점)

균일한 자기장 속에서 운동하는 뮤온을 생각하자. 뮤온 스핀의 세차는 두 가지 요인으로 결정된다: 자기장과의 직접적인 상호작용, 그리고 가속 운동으로 인한 토머스 세차. 자기장으로 인한 세차의 각속도는 뮤온이 정지한 경우 문제 A6에서 얻은 식으로 계산할 수 있다. 이하에서는 어디서나 뮤온의 스핀이 뮤온 운동 평면에 평행하다고 간주한다.

C1 실험실 기준 좌표계에 대한 뮤온 스핀 세차 각속도의 z 성분 ω_s 에 대한 식을 구하라. 답을 $B, g_\mu, q, m_\mu, \gamma$ 로 표현하라. **0.7**

C2 실제로는 뮤온 운동량의 방향에 대한 스핀의 회전을 고려하는 것이 더 편리하다. 뮤온 운동량의 방향에 대한 뮤온 스핀 회전의 각속도 ω_a (이는 운동량과 스핀 사이 각의 시간 미분과도 같다)를 구하라. 답을 $B, a_\mu, q, m_\mu, \gamma$ 로 표현하라. **0.5**

C3 운동량 방향에 대한 뮤온 스핀 세차의 실험적으로 측정된 진동수는 $f_a = 229081$ Hz이다. 뮤온의 비정상 자기 모멘트 a_μ 에 대한 식을 구하라. 답을 f_a, B, q, m_μ, γ 로 표현하라. a_μ 의 수치값을 계산하라. **0.8**

T3. 링 공진기를 이용한 주파수 측정

이 문제는 고정밀 주파수 측정 방법을 다룬다. 풀이 과정에서 두 가지 측정 방법, 즉 신호 변조(Part C)와 주파수 빔(frequency comb)(Part D)을 배우게 된다.

왜 더 높은 정밀도가 필요한가?

- 물리 측정의 정확도는 기본 상수의 값을 결정할 때 중요하다. 물리학의 역사에서 여러 번, 실험 결과와 이론 사이의 작은 불일치가 전체 이론 모형의 개정을 요구하였고 기초 물리학의 큰 발견으로 이어졌다.
- 높은 주파수 측정 정확도는 위성 통신 시스템, 항법, 지상 통신 시스템 등의 정상적인 작동을 위해 필요하다.

고전 물리학의 틀에서 모든 측정은 표준과의 비교이다. 주파수 표준으로서 우리는 링 광학 공진기(ring optical resonator)의 고유 주파수를 사용할 것인데, 오늘날 최고의 공진기는 링 공진기이기 때문이다. 그리고 품질이 높을수록 기준 고유 주파수의 값은 더 정확하다. Part B에서는 링 광섬유 광학 공진기를 예로 들어 링 공진기에 대해 더 배우게 된다. Part A에서는 Part B에서 다루는 공진기를 만드는 광섬유에서의 파동 전파 이론을 유도한다. 문제의 맨 끝에는 참고 자료(맥스웰 방정식과 미분 연산자)가 있다. 올림피아드 범위에 포함된 모든 물리 법칙을 알고 있다면, 문제를 푸는 데 참고 자료가 필요하지 않을 것이다.

전자기파 전파 방정식 공간의 각 점에서 전자기장은 네 개의 벡터 $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 로 기술된다—전기장 세기, 자기장 세기, 전기 변위, 자기 유도이다. 이 벡터들은 매질의 분극 $\vec{P}$ 와 자화 $\vec{M}$ 과 다음 관계로 연결된다:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}),$$

여기서 ϵ_0 는 전기 상수, μ_0 는 자기 상수이다.

문제를 풀 때 다음 근사를 사용하라:

- 모든 매질은 비자성이며 $\vec{M} = 0$ 이다.
- 자유 전하가 없다.
- 매질의 응답은 순간적이고 국소적이다. 즉, $\vec{P}(\vec{r}, t)$ 는 오직 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 에만 의존한다.

전자기파 이론. 맥스웰 방정식, 즉 미분 형태의 패러데이 유도 법칙과 미분 형태의 자기장 세기 순환 정리(참고 자료 참조)에 회전(rot) 연산자를 적용하면, 전자기파 전파의 기본 방정식을 얻는다:

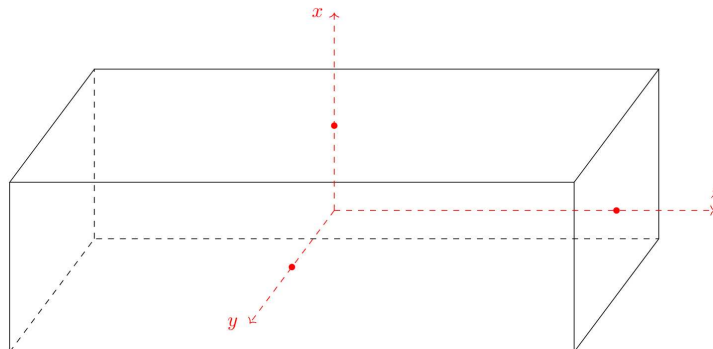
$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Part A. 광섬유에서의 장 분포 (2.5점)

Part A, B, C에서는 분극이 전기장 세기에 선형으로 의존한다고 가정한다: $\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon(\omega) - 1) \vec{E}$, 여기서 $\epsilon(\omega)$ 는 매질의 유전율(dielectric permittivity)로, 보통 매질 내 전자기파의 주파수에 의존한다. 진공의 유전율은 1과 같다.

따라서 전자기파 전파 방정식은 다음 형태로 쓸 수 있다:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$



주파수 ω 의 평면 단색 전자기파가 z 축을 따라 유전체 도파관(waveguide)(그림 1)을 따라 전파한다. 이 도파관은 유전 상수 $\varepsilon(\omega)$ 를 가진 물질로 된 직육면체이며 변의 길이는 a, L_1, L_2 이다. $L_1, L_2 \rightarrow \infty$ 이고 이 문제의 어떤 특성 길이보다도 훨씬 크다.

데카르트 좌표계 $Oxyz$ 를 도입하자. O 는 직육면체의 중심과 일치한다. 길이 L_1 의 모서리는 z 축에, 길이 a 는 x 축에, 길이 L_2 는 y 축에 평행하다. $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 는 오른손 삼중쌍이다.

y 축에 평행하게 편광된 파동을 생각하자: $\vec{E} \parallel \hat{y}$. 도파관 내 장 $\vec{E}$ 에 대한 해를 다음 형태로 찾는다:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \operatorname{Re} (A(x, y) \exp(i\omega t - i\beta z)) \hat{y},$$

여기서 E_0 는 전기장의 차원을 가지고, $A(x, y)$ 는 도파관의 서로 다른 점에서의 장의 진폭 비와 위상 차에 대한 정보를 담은 무차원 복소량이다. 일반성을 잃지 않고 $A(0, 0) = 1$ 로 둔다.

또한 $L_2 \gg a$ 라고 하자. 그러면 $\partial A / \partial y \ll \partial A / \partial x$ 로 가정할 수 있으며, 따라서 A 는 x 에만 의존한다.

$A(x)$ 에 대한 해는 다음 형태로 찾을 수 있다:

$$A(x) = \begin{cases} \cos(k_{in}x), & |x| < a/2 \\ C_1 \exp(k_{out}x) + B \exp(-k_{out}x), & x > a/2 \\ B \exp(k_{out}x) + C_2 \exp(-k_{out}x), & x < -a/2 \end{cases}$$

여기서 $k_{in} > 0, k_{out} > 0$ 이다.

A1 계수 C_1 과 C_2 는 무엇인가?

0.3

A2 파동 방정식을 이용하여, k_{in} 과 k_{out} 을 $\varepsilon, \omega, \beta$ 및 진공 중 빛의 속력 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ 으로 표현하라.

0.5

B 를 구하기 위해, 경계 $x = a/2$ 에 대한 경계 조건을 써야 한다 (경계 $x = -a/2$ 에 대해서는, $A(x)$ 가 우함수이므로 동일한 방정식을 얻는다).

A3 전기장 세기의 접선 성분이 계면의 양쪽에서 같음을 증명하라 (정전기학에서와 같이).

0.3

A4 전기장 세기의 접선 성분에 대한 경계 조건을 쓰라. B 를 a, k_{in}, k_{out} 으로 표현하라.

0.3

이제 $\beta(\omega)$ 를 찾기 위한 방정식을 유도해야 한다. 이를 위해 $\vec{H}$ 에 대한 또 다른 경계 조건을 쓸 수 있다.

A5 자기장 세기의 접선 성분이 계면의 양쪽에서 같음을 증명하라 (정자기학에서와 같이).

0.3

A6 다음을 증명하라:

0.3

$$H_z = E_0 \operatorname{Re} \left(\frac{i}{\mu_0 \omega} \frac{\partial A}{\partial x} \exp(i(\omega t - \beta z)) \right).$$

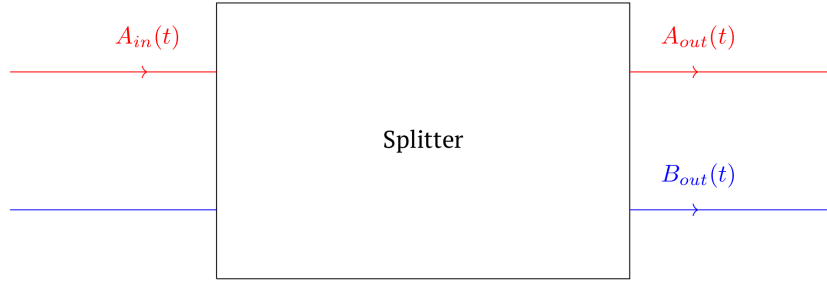
A7 자기장 세기 $\vec{H}$ 의 접선 성분에 대한 경계 조건을 쓰라. 답은 k_{in}, k_{out}, a 로 표현할 수 있다.

0.3

A8 A2에서 얻은 값 k_{in}, k_{out} 을 A7의 방정식에 대입하라. β 를 결정할 수 있는 방정식을 얻으라 (이 방정식은 수치적으로만 풀린다). 이 방정식은 $\beta, \omega, \varepsilon, c, a$ 를 포함할 수 있다.

0.2

Part B. 광섬유 공진기 투과율 (3.0점)



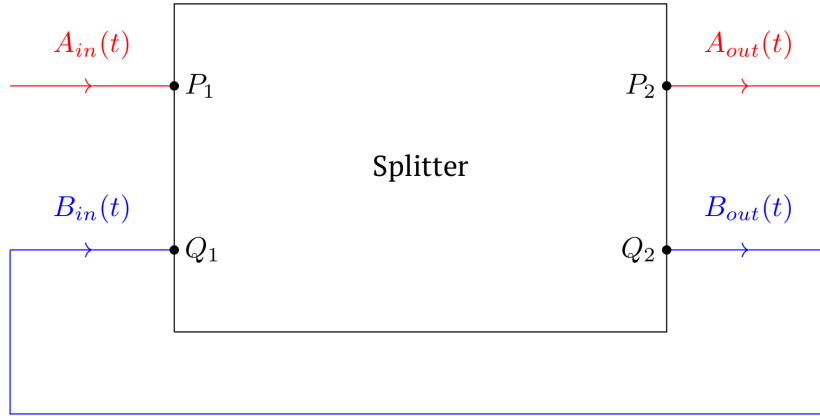
외부 레이저의 복사가 사극자 빔 분배기(quadrupole beam splitter)로 들어간다. 이는 두 쌍의 결합된 채널 (P_1, P_2)와 (Q_1, Q_2)을 가진 광학계이다.

복소 진폭 $A_{in}(t)$ 를 가지고 분배기로 들어가는 단색파는 같은 방향으로 전파하는 더 작은 진폭의 두 출력파로 분할된다. 그중 첫 번째는 입사파와 같은 쌍 채널을 따라 전파하며, 그 복소 진폭은 $A_{out}(t) = -r_s A_{in}(t)$ 이다. 두 번째 파동은 다른 쌍의 채널을 통해 전파하며 그 진폭은 $B_{out}(t) = it_s A_{in}(t)$ 이다. Q_1 로 입사하는 파동은 P_1 로 입사하는 파동과 유사하게 분할된다. r_s 와 t_s 는 양의 실수이고 $t_s \ll 1$ 이라고 하자.

B1 분배기에서 에너지 손실이 없다고 가정하고, r_s 와 t_s 사이의 관계를 구하라.

0.2

이 분배기로 광섬유 공진기를 조립할 수 있다. 이를 위해서는 채널 Q_1 과 Q_2 를 길이 L 의 단일 모드 광섬유 고리(loop)(이 부분에서 고려하는 주파수에 대해 $\beta(\omega)$ 에 대한 방정식이 유일한 해를 가진다)로 연결해야 한다. 주파수 ω 의 빛이 고리를 통과하는 시간은 $\tau(\omega)$ 이다. 또한 물질 흡수로 인해 고리 내 파동의 진폭은 고리를 한 바퀴 돌 때마다 $1/\kappa$ 배만큼 감소한다($1 - \kappa \ll 1$). Part B와 C의 모든 문제에서 후방 산란(backscattering)은 무시한다.



외부 레이저로부터 단색파 $A_{in}(t) = A_0 e^{i\omega t}$ 가 채널 P_1 의 입력에 입사한다고 하자.

B2 분배기 Q_1 의 입력에서의 장 진폭 $B_{in}(t)$ 를, κ 와 시각 $(t - \tau(\omega))$ 에서의 Q_2 출력 장 진폭 $B_{out}(t - \tau(\omega))$ 로 표현하라.

0.3

계가 정상 상태(steady-state)에 도달했다고 가정하자. 즉, 임의의 점에서 복소 장 진폭의 절댓값이 일정하고, 두 점에서의 장의 위상차가 시간에 따라 변하지 않는다. 그러면 임의의 진폭 E_i (E_i 대신 $A_{in}, A_{out}, B_{in}, B_{out}$ 을 대입할 수 있다)에 대해 다음 식이 성립한다:

$$E_i(t - t') = e^{-i\omega t'} E_i(t).$$

B3 정상성 조건을 이용하여 $B_{in}(t)$ 를 $B_{out}(t), \kappa, \omega, \tau$ 로 표현하라.

0.3

B4 앞 문제의 결과를 이용하여 $B_{in}(t)$ 를 $A_0, r_s, t_s, \kappa, \omega, \tau, t$ 로 표현하라.

0.5

B5 채널 P_2 를 빠져나가는 출력 N_2 는 얼마인가? 답을 $\omega\tau(\omega), \kappa, r_s$ 및 채널 P_1 의 출력 N_1 으로 표현하라. **0.5**

B6 다음 매개변수를 가진 광섬유 공진기에 대해 $N_2/N_1(\omega\tau)$ 의 정성적 그래프를 그려라: **0.6**

- $\kappa = 1 - 5 \cdot 10^{-3}$;
- $t_s = 0.1$.

$\omega\tau$ 가 어떤 값일 때 비 N_2/N_1 이 최소가 되는가?

B7 번호 $n = 100$ 인 흡수 봉우리의 첨예도(sharpness) Q 를 구하라. **0.6**

첨예도는 봉우리 주파수와, 투과율 골(dip)이 특정 봉우리의 최대 골의 절반보다 작지 않은 주파수 영역의 너비의 비이다.

오늘날에는 빔 분배기를 기반으로 한 광섬유 공진기를, 파장 1550 nm에 해당하는 주파수 부근에서 약 $5 \cdot 10^7$ 의 봉우리 첨예도로 만들 수 있다. 그리고 용융 석영으로 만든 링 마이크로공진기를 사용하면 10^9 의 첨예도를 얻을 수 있다. 그러한 작은 손실을 가진 공진기는 정확한 주파수 측정을 위한 폭넓은 가능성을 열어 준다.

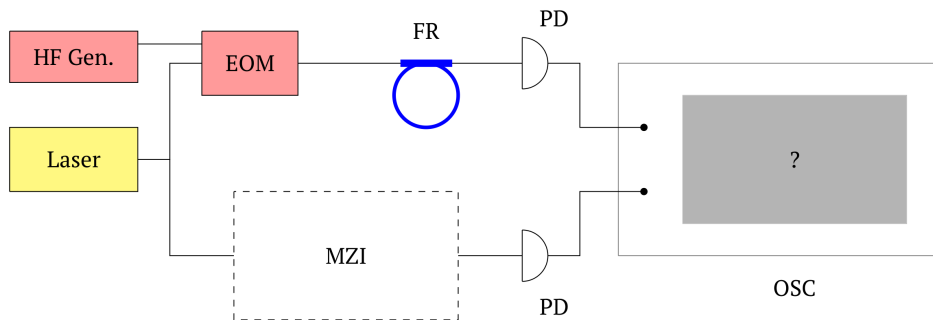
즉, 석영 마이크로공진기로는 평균 파장 1550 nm의 스펙트럼선을 단 0.000002 nm의 너비로 얻을 수 있다!

Part C. 마흐-젠더 간섭계의 보정 (2.0점)

그림 1에 나타난 간섭계 보정 장치를 생각하자. 이제 레이저 주파수가 시간에 따라 부드럽게 변하고($\omega\tau$ 가 공진기에서 정상 모드가 확립되는 데 걸리는 시간의 역수보다 훨씬 작다), 그 출력은 일정하다.

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

레이저로부터의 복사 다발이 Part B의 분배기와 유사한 또 다른 빔 분배기에 의해 두 갈래로 나뉜다. 광학 회로의 첫 번째 갈래에는 마흐-젠더 보정 간섭계와 그로부터 나오는 출력을 측정하는 광검출기가 있고, 두 번째 갈래에는 공진기와 유사한 광검출기가 있다. 광검출기로부터의 신호는 오실로스코프로 보내진다. 광검출기의 신호는 복사 출력에 비례한다. 오실로스코프는 광검출기 전압의 시간 의존성을 보여 준다(XY 모드가 아니다!).



레이저 매개변수:

- $\omega_0 = 1.26 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$
- $\alpha = 5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-2}$

공진기 매개변수:

- ω_0 부근의 흡수 봉우리 첨예도는 $5 \cdot 10^7$
- $\tau(\omega)$ 는 주파수에 무관하며 $\tau_0 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ 와 같다고 간주하라
- $\kappa = 1 - 1 \cdot 10^{-3}$
- $t_s = 0.1$

보정할 간섭계의 매개변수:

- 그 출력 투과 용량은 대략 $F_{MZI}(\omega) = \cos^2(\omega/2\omega_{MZI})$
- $\omega_{MZI} \approx 1250$ MHz. 정확한 값은 이 장치에서 결정될 것이다.

C1 가변 레이저의 주파수가 B6에 주어진 주파수 중 정확히 하나(즉, FR 투과율이 최소가 되는 주파수)에 도달함이 확실하다고 할 때, 오실로스코프 판독값의 정성적 그래프를 그려라. **0.5**

이제 진폭 전기광학 변조기(electro-optic modulator)가 두 번째 갈래에 연결된다. 그 진폭 대역폭은 복사 파장에 무관하며 다음과 같다:

$$f_{EOM}(t) = \beta + (1 - \beta) \cos(\Omega t), \quad \Omega \ll \omega_0, \quad \beta < 1.$$

C2 $\Omega \approx 220$ MHz일 때 오실로스코프가 보여 줄 것을 그려라. $\alpha \ll \Omega\omega_0$ 임에 유의하라. **1.0**

C3 고주파 발진기의 최대 신호 주파수가 $\Omega_{max} = 1250$ MHz일 때, 이 장치에서 주기 ω_{MZI} 를 어떤 상대 정확도로 측정할 수 있는지 추정하라. **0.5**

Part D. 3차 비선형성과 솔리톤 (2.5점)

정밀 측정과 고주파 통신을 위해서는, 시간에 따라 그 모양이 변하지 않는 매우 짧은 광 펄스(이러한 펄스를 솔리톤(soliton)이라 한다)를 얻는 것이 필요하다. 이는 선형 광학에서는 불가능한데, 유전 상수와 분산 상수가 주파수에 의존하여 펄스가 분산으로 인해 “번지기” 때문이다.

다행히도 선형 광학의 근사는 모든 물질에 대해 성립하는 것은 아니며, 그로부터 생기는 비선형성이 분산과 관련된 바람직하지 않은 효과를 상쇄할 수 있다.

Part D에서는, 분극 벡터의 임의의 축 i 에의 사영 $P_i(\vec{r}, t)$ 이 같은 점, 같은 순간의 전기장 세기 사영 $E_i(\vec{r}, t)$ 에 다음과 같이 의존한다고 가정한다:

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 ((\epsilon(\omega) - 1)E_i(\vec{r}, t) + \chi E_i^3(\vec{r}, t)).$$

펄스는 반송 주파수(carrier frequency)에 매우 가까운 주파수($\omega \approx \omega_0$)와, 반송파의 전파 상수에 매우 가까운 전파 상수 $\beta \approx \beta_0 = \beta(\omega_0)$ 를 가진 전자기파들의 합이다:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} (E_0 F(z, t) A(x, y) \exp(i\omega_0 t - i\beta_0 z)) \hat{y}.$$

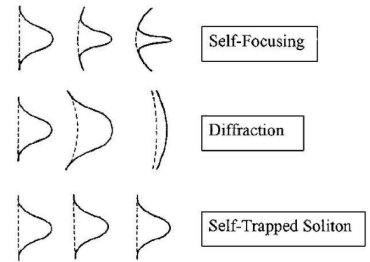
여기서 $\beta(\omega)$ 는 Part A에서 구한 전파 상수이고, $A(x, y)$ 또한 Part A에서 가져온다. $F(z, t)$ 는 펄스 모양에 대한 정보를 담은 복소 함수이다.

함수 $\beta(\omega)$ 는 2차 함수로 근사할 수 있다:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega - \omega_0)^2/2.$$

이러한 형태의 해를 도입에서 유도한 파동 방정식에 대입하고, 학교 과정을 넘어서는 수학적 변형을 통해 $F(z, t)$ 에 대한 방정식을 얻는다:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - i\gamma |F|^2 F = 0.$$



위에서부터: 자기 집속(Self-Focusing), 회절(Diffraction), 자기 포획 솔리톤(Self-Trapped Soliton)

펄스는 군속도(group velocity)로 전파하므로, 군속도로 함께 움직이는 기준 좌표계로 옮기는 것이 합리적이다. 이 좌표계에서 위 방정식은 다음 형태로 다시 쓰인다:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2\beta_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = i\gamma|F|^2F,$$

여기서 $s = t/\beta_1 - z$ 는 솔리톤 기준 좌표계에서의 공간 좌표이고, γ 는 χ 에 비례하는(그리고 같은 부호를 가지는) 3차 비선형성 계수이다. 얻어진 방정식을 **비선형 슈뢰딩거 방정식**(Nonlinear Schrödinger equation, NLSE)이라 한다. Part D에서는 NLSE를 분석한다. 모든 답을 그 계수들로 표현해야 한다.

D1 군속도 v_g 를 β_1 으로 표현하라. 0.1

D2 솔리톤의 모양을 찾아 보자. NLSE의 해는 다음 형태로 찾을 수 있다: 0.6

$$F(z, s) = \frac{F_0 \exp(i\sigma z)}{\cosh(\theta s)}.$$

F_0 와 σ 를 $\theta, \beta_1, \beta_2, \gamma$ 로 표현하라.

FR의 고유 주파수 중 하나가 ω_0 라고 하자. FR의 길이는 0부터 ω_0 사이의 범위에 매우 많은 다른 고유 주파수가 존재하도록 되어 있다. 그러면 다른 고유 주파수들에 대해 다음 등식이 성립한다: $\omega_\mu \approx \omega_0 + D_1\mu + D_2\mu^2/2$, 여기서 μ 는 정수이고 $\omega_0 \gg D_1 \gg D_2$ 이다.

D3 D_1 과 D_2 를 β_1, β_2 및 고리 길이 L 로 표현하라. 힌트: 고유 주파수 조건 $-B_{in}(t)$ 와 $B_{in}(t - \tau(\omega_\mu))$ 는 같은 위상을 가진다. 0.5

D4 공진기가 $\chi > 0$ 인 물질로 만들어졌다고 하자. 어떤 D_2 에서 그 안에 솔리톤이 존재할 수 있는가? 0.3

D5 D3에서 기술한 FR 안에 반송 주파수 ω_0 의 솔리톤이 순환한다고 하자. 외부 레이저는 작동하지 않는다. 공진기의 방출 스펙트럼(주파수에 따른 비출력의 의존성)을 주파수 범위 $(\omega_0 - 20D_1, \omega_0 + 20D_1)$ 에서 정성적으로 그려라. $\omega_0/Q(\omega_0) \ll D_1$ 이라고 간주하라. (Q 는 B7에서 정의한 첨예도임을 기억하라.) 0.6

D6 D5의 스펙트럼을 이용하여 각주파수 측정 ω 의 절대 오차를 추정하라. 0.2

D7 왕복 시간 τ_s 를 D_1 으로 표현하라. 0.2

참고 자료

공간에 데카르트 좌표계 $Oxyz$ 를 도입하자. 해당 축을 따른 단위 벡터는 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 이며 오른손 삼중쌍을 이룬다.

- 기울기(grad) 연산자는 스칼라 φ 를 다음과 같이 벡터로 변환한다:

$$\text{grad } \varphi = \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- 발산(div) 연산자는 벡터 $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$ 를 다음과 같이 스칼라로 변환한다:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- 회전(rot) 연산자는 벡터 $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$ 를 다음과 같이 벡터로 변환한다:

$$\text{rot } \vec{a} = \hat{x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

- 라플라스 연산자 Δ 는 스칼라를 스칼라로, 또는 벡터를 벡터로 변환한다:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}$$

- 벡터 $\vec{a}$ 에 회전을 두 번 적용하면 다음 벡터를 얻는다:

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}.$$

맥스웰 방정식

각 방정식은 먼저 적분 형태로, 그다음 미분 형태로 쓴다:

- 자기 유도에 대한 가우스 정리 (임의의 닫힌 곡면을 통과하는 자기 유도의 다발은 0이다):

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

- 전기 변위에 대한 가우스 정리 (닫힌 곡면을 통과하는 전기 변위의 다발은 그것이 둘러싼 부피 내부의 자유 전하와 같다):

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = q_f = \int_V \rho_f dV, \quad \text{div } \vec{D} = \rho_f$$

여기서 ρ_f 는 자유 전하의 부피 밀도이다.

- 패러데이의 전자기 유도 법칙 (닫히지 않은 곡면을 통과하는 자기 유도 다발의 변화율을 반대 부호로 취한 것은, 그 곡면의 경계인 닫힌 고리에서의 전기장 순환과 같다):

$$\oint_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}), \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- 자기장 세기에 대한 순환 정리 (닫히지 않은 곡면을 통과하는 전기 변위 다발의 변화율과, 그것을 통과하는 자유 전하의 총 전류의 합은, 그 곡면의 경계인 닫힌 윤곽에서의 자기장 순환과 같다):

$$\oint_l (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_f + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}), \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f$$