

헤르츠 접촉 응력 [10점]

이 문제를 시작하기 전에 일반 지침을 읽으시오.

서론

헤르츠 접촉 이론은 접촉 역학의 고전적인 이론으로, 공학자와 연구자에게 매우 유용한 도구이다. 이론의 유도는 비교적 어렵지만 최종 결과는 계의 성질과 생겨나는 응력을 이어 주는 간단한 해석적 식들의 모음이다. 헤르츠 접촉 이론은 이론바 반공간 근사 아래에서 탄성론 방정식의 해석적 해로부터 유도된다.

1. 두 면 중 하나는 무한히 넓은 반공간(평면이 3차원 유클리드 공간을 나눌 때 생기는 두 영역 중 하나)이다(그림 1).
2. 압력 분포는 포물선꼴이다(식 2).
3. 이 무한 반공간 모형은 크기가 같거나 다른 두 구형 공에 대해서도 쓸 수 있다.

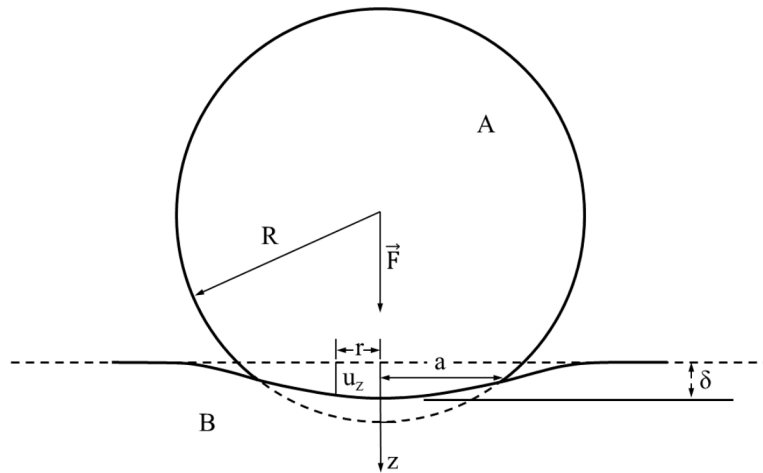


그림 1 (A - 구형 공, B - 무한히 큰 반공간)

면에 연직 방향의 힘만 작용한다면, 가해진 압력에 의한 면의 탄성 변형은 다음 관계로 주어진다.

$$u_z(x, y) = \frac{2\pi}{E'} \iint \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy' \quad (1)$$

여기서 u_z 는 탄성 변형, $\frac{1}{E'} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2}$ 는 축소 탄성률이며, ν_1, E_1, ν_2, E_2 는 각각 두 구의 푸아송 비와 영률이고(이 값들은 주어진 공에 대해 상수이며 과제 E.1의 계산에 제공된다), $p(x, y)$ 는 접촉 압력이다. 압력 분포가 임의의 꼴이면 이 식은 해석적 해로 이어지지 않는다. 그러나 헤르츠 해는 포물선꼴 압력 분포를 가정하여 얻어지며, 이는 접촉하는 구형, 타원체형, 원기둥형 물체에 대해 매우 좋은 근사이다.

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

여기서 r 는 면 위의 임의의 점까지의 거리이고 a 는 헤르츠 접촉 반지름이라 불리는 매개변수이다. 매개변수 p_0 는 최대 헤르츠 압력이라고도 한다. 이를 변형에 대한 식 (1)에 대입하면 헤르츠 압력에 대한 다음 표현을 얻는다.

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E'a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (3)$$

이 실험 문제는 두 부분으로 이루어진다: 큰 각 진자와 두 공의 충돌.

일반 안전 수칙:

1. 전원 코드를 꽂거나 뽑기 전에 반드시 장비의 전원을 끄시오. 손상이 생길 수 있다.
2. 문제에서 지시하지 않는 한 오실로스코프 설정을 바꾸지 마시오.
3. 마시는 물을 근처의 전자 장치나 전원 콘센트에 쏟지 않도록 주의하시오.
4. 실험을 마치기 전에는 첫 번째 실험 장치를 분해하지 마시오. 다시 조립할 수 없다.

장치

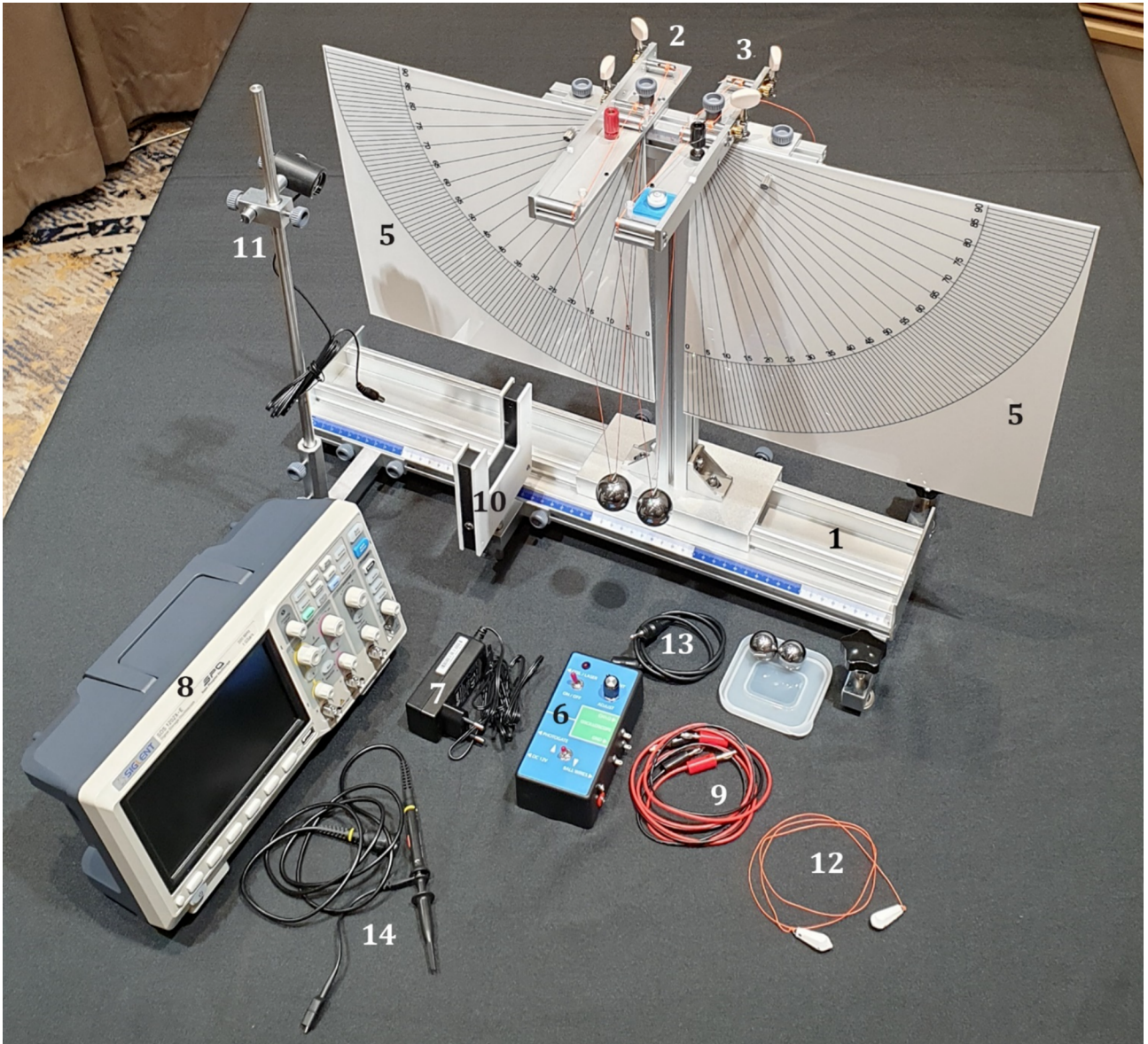


그림 2

1. 장치의 바닥판(바닥판은 두 실험 모두에 쓰인다).
2. 길이 장치가 달린 진자 1(큰 공이 이미 매달려 있다).
3. 길이 장치가 달린 진자 2(큰 공이 이미 매달려 있다).
4. 작은 크기의 공 두 개.
5. 좌·우측 각도 측정 스크린.
6. 전기 접속 상자.
7. 전원 어댑터.
8. 측정 프로브 14가 달린 오실로스코프.
9. 공 접촉 측정용 연결선.
10. 연결 케이블(13)이 달린 진자용 광게이트.
11. 조절 스탠드가 달린 전자석 공 고정 장치.
12. 추 두 개가 달린 줄.

파트 A: 큰 각 진자 [1.4점]

이 파트에서는 공 하나로 된 진자에 대해, 큰 각에서 작은 각까지 되도록 넓은 각 범위에 걸쳐 최대 속력과 각진폭의 관계를 결정해야 한다.

진자를 쓰려면 공 위치 조절 방법을 알아야 한다. 각 진자 길이에는 줄 조절 손잡이가 두 개 있다. 이는 z 방향으로 공을 위/아래로, y 방향으로 앞/뒤로 조절하는 데 쓰인다. x 방향으로 공의 위치를 좌/우로 조절하려면 진자 길이 장치를 사용해야 한다(그림 3).

이 과제에서는 진자 중 하나만 사용해야 한다. 따라서 이미 고정된 공 중 하나를 진자 길이를 조이는 나사 머리 위에 올려 두시오. 진자 줄이 사용 중인 진자의 운동을 방해하지 않도록 주의하시오.

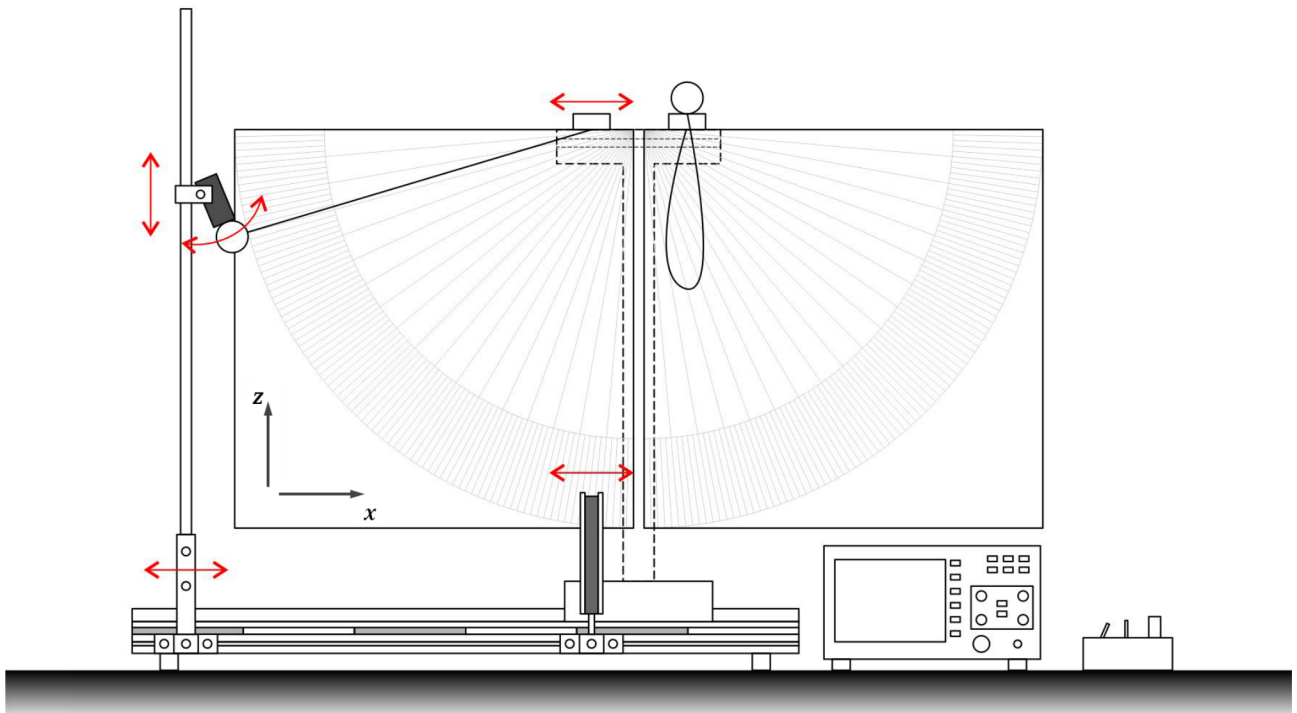


그림 3

- A.1** $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ 에 대한 Δt^{-1} 의 기울기를 구하라. 여기서 φ_0 는 진자의 초기 각(또는 각진폭)이고 Δt 는 공이 광게이트를 지나는 데 걸리는 시간이다. 1.2pt

비고 1. 디지털 저장 오실로스코프에서 시간을 정밀하게 측정하려면 일반 지침(G)의 오실로스코프 사용법을 따르는 것이 좋다. 사용 중인 오실로스코프의 모델과 실습 지침에 유의하시오. 시간을 아끼려면 과제 B.1의 측정을 이 과제와 함께 수행해도 된다. 공이 전자석 고정 장치에서 놓일 때 줄의 탄성과 공의 자화가 공의 초기 속력에 영향을 줄 수 있다. 따라서 광게이트에서 나온 첫 번째 신호를 골라서는 안 된다.

- A.2** 진자의 임의의 초기 각에 대해 공의 최대 속력을 구하는 일반적인 식을 유도하라. 0.2pt

파트 B: 진동 주기 [1.9점]

각진폭에 따른 진자의 주기는 다음 급수로 주어진다.

$$T = T_0 \left(1 + \alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \beta \cdot \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right) \quad (4)$$

여기서 T_0 는 진폭이 작을 때의 진자 주기, α 와 β 는 상수 계수, φ_0 는 각진폭이다.

- B.1** 진동 주기를 측정하여 $T = f(\varphi_0)$ 의 선형화된 그래프를 그려라. 적절한 영역에 대해 서로 다른 선형화가 필요함에 유의하라. 그래프로부터 T_0 , α , β 를 결정하라. 1.6pt

비고 2. 디지털 저장 오실로스코프에서 주기를 매우 정밀하게 측정하려면 문제지 끝에 있는 오실로스코프 사용 실습을 해 보는 것이 좋다. 사용 중인 오실로스코프의 모델과 실습 지침에 유의하시오.

- B.2** 과제 A.1에서 구한 기울기와 과제 B.1의 T_0 를 이용하여 울란바토르의 정확한 중력가속도 값을 구하라. 강철 공의 지름은 $d = 31.75 \text{ mm}$ 이다. 0.3pt

파트 C: 충돌의 거동 [0.7점]

공의 초기 위치와 상태는 첫 충돌과 이후 충돌 과정 — 충돌 위치, 접촉 시간, 공 위의 접촉 지점 — 에 큰 영향을 준다. 이 과제를 수행할 때 공 위치 조절 방법에 유의하시오.

이 파트에서는 크기가 같은 공들의 충돌 거동에 접촉 위치가 미치는 영향을 관찰한다. C.1-C.4에 기술된 각 상황(그림 4의 알맞은 설명과 대응된다)에 대해 충돌의 거동을 관찰하고, 각 과제마다 장치의 배치와 그림 5의 시간 의존 그래프를 찍으시오.

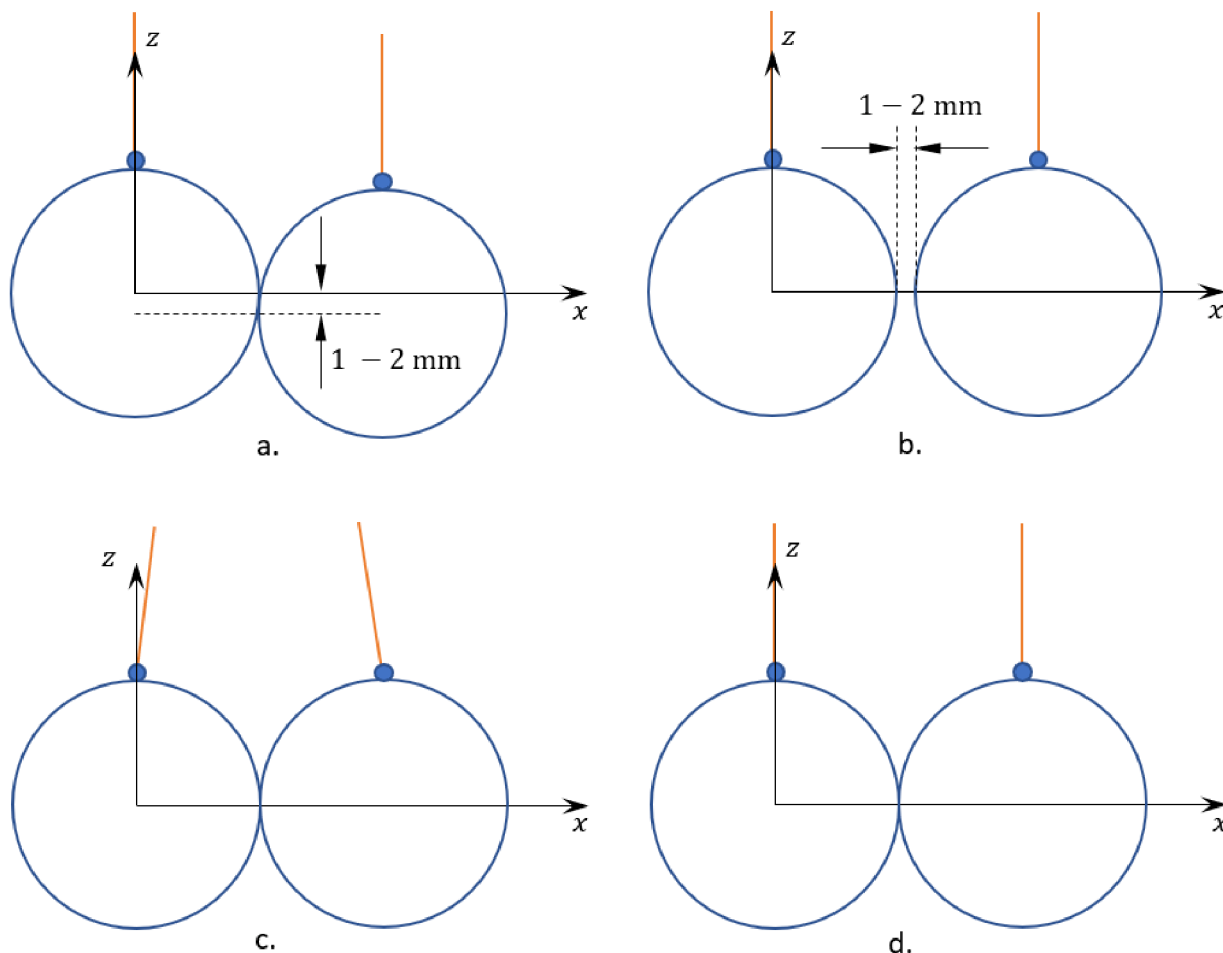


그림 4

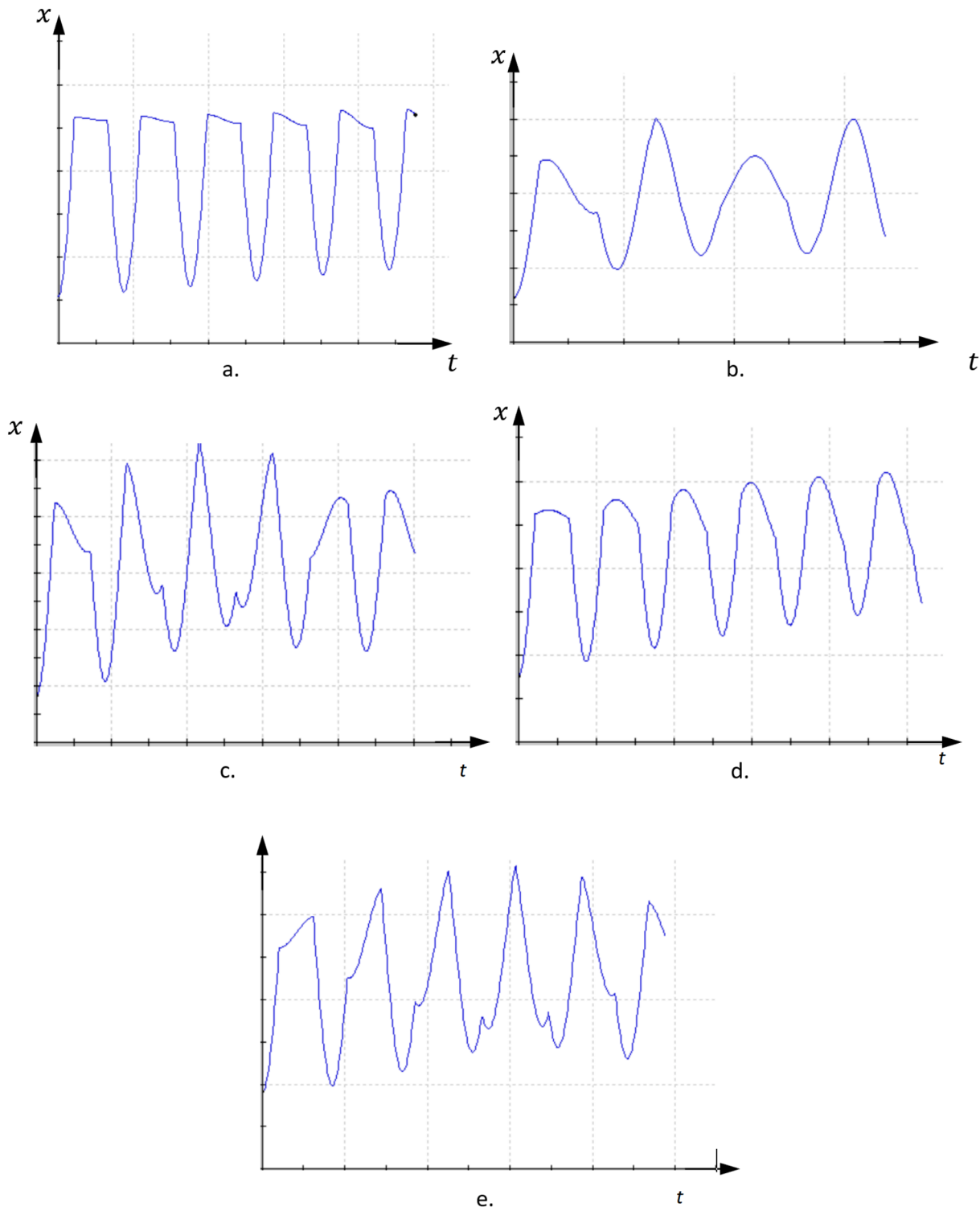


그림 5

- C.1** 두 공이 매달려 평형 위치에서 안정해 있을 때 첫 번째 공의 중심을 좌표계의 원점으로 잡는다. 그러면 두 공 중심 사이의 x 방향 변위 $d_x = 2R$, y 방향 변위 $d_y = 0$, z 방향 변위 $d_z \approx 1 \sim 2 \text{ mm}$ 로 위치를 나타낼 수 있고 매달린 줄은 거의 평행하다(그림 4.a). 공 2가 평형 위치에 있을 때 공 1을 25° 에서 30° 사이의 각에서 초기 속력 없이 놓는다. 크기가 같은 공들의 충돌 거동에 접촉 위치가 미치는 영향을 눈으로 관찰하라. 0.2pt
- C.2** $d_x - 2R \approx 1 \text{ mm}$, $d_y = 0$, $d_z = 0$ 이고 두 줄이 평행하다. 즉 공 겹이 장치를 1 mm 만큼 떨어뜨려야 한다(그림 4.b). 공 2가 평형 위치에 있을 때 공 1을 25° 에서 30° 사이의 각에서 초기 속력 없이 놓는다. 크기가 같은 공들의 충돌 거동에 접촉 위치가 미치는 영향을 눈으로 관찰하라. 0.2pt
- C.3** 두 공이 접촉해 있고 $d_x \approx 2R$, $d_y = 0$, $d_z = 0$ 이며 공 겹이 장치가 서로 맞닿아 있다. 이 경우 줄은 평행하지 않다(그림 4.c). 공 2가 평형 위치에 있을 때 공 1을 25° 에서 30° 사이의 각에서 초기 속력 없이 놓는다. 크기가 같은 공들의 충돌 거동에 접촉 위치가 미치는 영향을 눈으로 관찰하라. 0.2pt
- C.4** 두 공이 접촉해 있고 $d_x \approx 2R$, $d_y = 0$, $d_z = 0$ 이며 공 겹이 장치는 떨어져 있고 공의 줄은 평행하다(그림 4.d). 공 2가 평형 위치에 있을 때 공 1을 25° 에서 30° 사이의 각에서 초기 속력 없이 놓는다. 크기가 같은 공들의 충돌 거동에 접촉 위치가 미치는 영향을 눈으로 관찰하라. 0.1pt

파트 D: 충돌 시간 [3.0점]

헤르츠 접촉은 일정한 시간 동안 지속되고 그 뒤 공들이 떨어진다. 이 파트에서는 같은 크기와 다른 크기의 공들 사이에서 여러 번 충돌을 일으켜 충돌 시간 τ 가 공의 어떤 매개변수에 의존하는지 살펴본다. 접촉 시간을 측정하기 위해 그림 6에 나타난 전기 회로를 사용한다. 진자의 나일론 줄은 진동만을 위한 것이고, 공에는 추가로 가는 금속선이 연결되어 있다. 줄을 바꿀 때에는 금속선이 공에 확실하게 닿도록 하시오. 이를 유지하기 위해 제공된 나무 이쑤시개를 사용하여 금속선과 나일론 줄이 공 겹이 홈에서 미끄러지지 않게 고정하시오. 홈의 양쪽을 모두 막지는 마시오! 줄을 바꾸려면 고정용 이쑤시개 핀을 빼야 한다. 이 작업을 위해 종이 클립이 제공된다(그림 7).

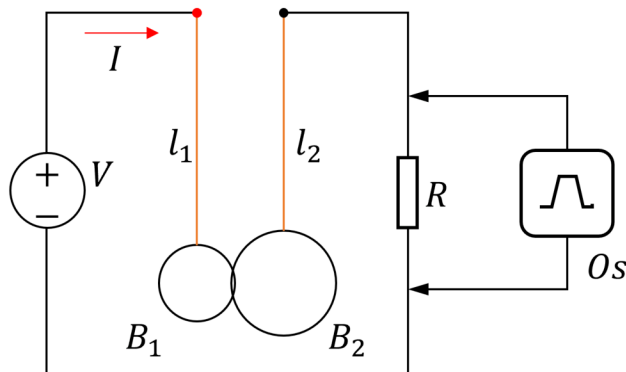


그림 6 (B_1 - 공 1, B_2 - 공 2, O_s - 오실로스코프)

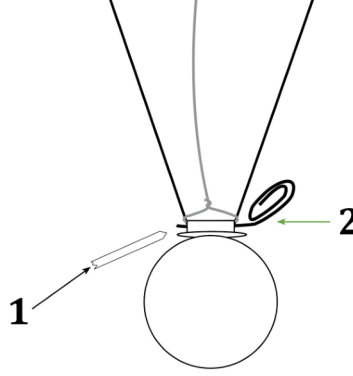


그림 7 (1 - 이쑤시개, 2 - 종이 클립)

D.1 공들 사이의 충돌 시간 τ 는 다음 식으로 주어진다: $\tau = A \cdot x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$. 여기서 A 는 무차원 상수이고 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (어떤 정수 n 에 대해)은 충돌의 물리적 매개변수이다. 이 물리적 매개변수를 모두 결정하라. 지수 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 의 값은 파트 D.2와 D.3에서 결정할 것이다. 0.4pt

D.2 실험을 통해 알맞은 선형 그래프를 그려, D.1의 τ 에 대한 식에 있는 지수 중 일부의 값을 구하라. 1.2pt

D.3 차원 분석과 D.2에서 얻은 지수 값을 이용하여 나머지 지수의 값을 구하라. 0.4pt

D.4 A 의 수치를 높은 정확도로(적어도 유효숫자 4자리) 구하라. 1.0pt

파트 E: 헤르츠 변형의 매개변수 [3.0점]

과제 A.2의 최대 속력 식과 과제 D.2에 바탕한 실험 자료를 이용하여, 여러 초기 각의 범위에 대해 다음 매개변수들을 구하라($\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E = E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa}$, $m_1 = 131.48 \text{ g}$, $m_2 = 67.55 \text{ g}$, $d_1 = 31.74 \text{ mm}$, $d_2 = 25.42 \text{ mm}$).

E.1 평균 힘 F_{av} 의 식을 구하고 그 수치를 계산하라. 0.6pt

E.2 헤르츠 변형량 δ 의 식을 구하고 그 수치를 계산하라. 0.6pt

E.3 헤르츠 반지름 a 의 식과 값. 0.6pt

E.4 헤르츠 압력 P_0 의 식을 구하고 그 수치를 계산하라. 0.6pt

E.5 평균 압력 P_{av} 의 식을 구하고 그 수치를 계산하라. 0.6pt