

EQ1: 공식 풀이<sup>1</sup>

## A.1 (1.0 pt)

자석을 각 축을 따라 움직이면서 자기장의 변화를 살펴본다. 예를 들어 자석이 스마트폰의 길이 방향으로 놓여 있고 자석을 같은 방향(스마트폰의 길이 방향)으로 움직이면, 자석이 자력계를 지날 때 자기장의 부호가 바뀌는 것을 볼 수 있다.

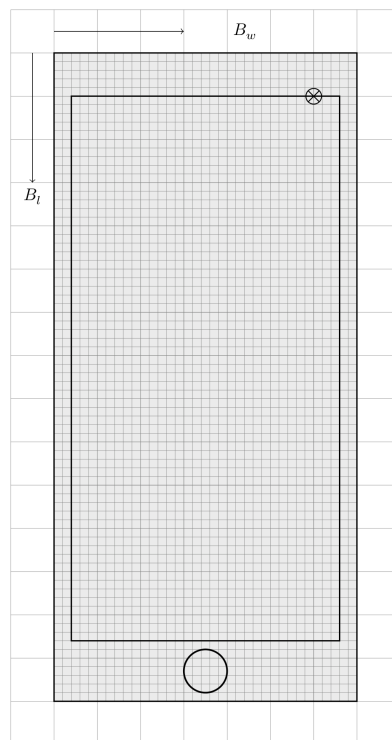
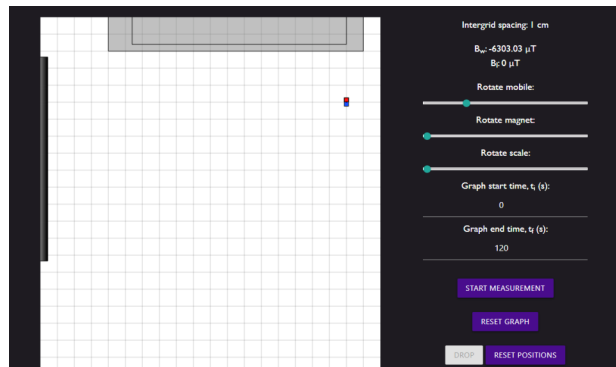


그림 1

<sup>1</sup> Chandan Relekar(IISc 방갈로르), Siddhant Mukherjee(영국 케임브리지 대학교), Siddharth Tiwary(IIT 파와이 뭄바이), Charudutt Kadolkar(IIT 구와하티), Praveen Pathak(HBCSE-TIFR 뭄바이)가 이 문제의 주 저자이다. 학술위원회와 국제이사회의 기여에 감사드린다.

## A.2 (2.3 pt)

쌍극자 모멘트를 구하기 위한 장치



쌍극자 중심에서 거리  $x(x \gg d)$ 만큼 떨어진 점에서 점 쌍극자의 자기장  $B_w$  는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$B_w = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{x^3} \quad (1)$$

위 식을 정리하면

$$B_w = \frac{\mu_0 M}{2\pi} \times \frac{1}{x^3} \quad (2)$$

식 (2)로부터  $B_w$  대  $\frac{1}{x^3}$  그래프는 원점을 지나는 직선이다. 기울기를 구하면 자석의 쌍극자 모멘트를 얻는다.

## A.2 (계속)

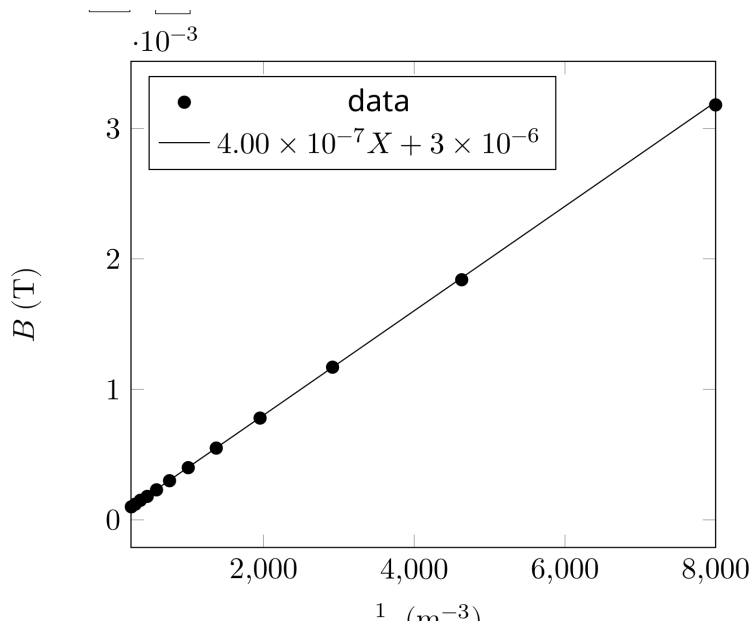
자석의 쌍극자 모멘트:

알맞은 양을 채워 넣으라.

| 번호 | $x$ (cm) | $B_w$ ( $\mu$ T) | $\frac{1}{x^3}$ ( $\text{m}^{-3}$ ) | $B_w$ (T)  |
|----|----------|------------------|-------------------------------------|------------|
| 1  | 5        | 3177.63          | 8000                                | 0.00317763 |
| 2  | 6        | 1841.06          | 4629.63                             | 0.00184106 |
| 3  | 7        | 1170.34          | 2915.45                             | 0.00117034 |
| 4  | 8        | 783.69           | 1953.13                             | 0.00078369 |
| 5  | 9        | 550.22           | 1371.74                             | 0.00055022 |
| 6  | 10       | 403.42           | 1000                                | 0.00040342 |
| 7  | 11       | 301.21           | 751.31                              | 0.00030121 |
| 8  | 12       | 231.96           | 578.7                               | 0.00023197 |
| 9  | 13       | 181.58           | 455.17                              | 0.00018158 |
| 10 | 14       | 146.03           | 364.43                              | 0.00014603 |
| 11 | 15       | 118.72           | 296.3                               | 0.00011872 |
| 12 | 16       | 98.18            | 244.14                              | 0.000099   |

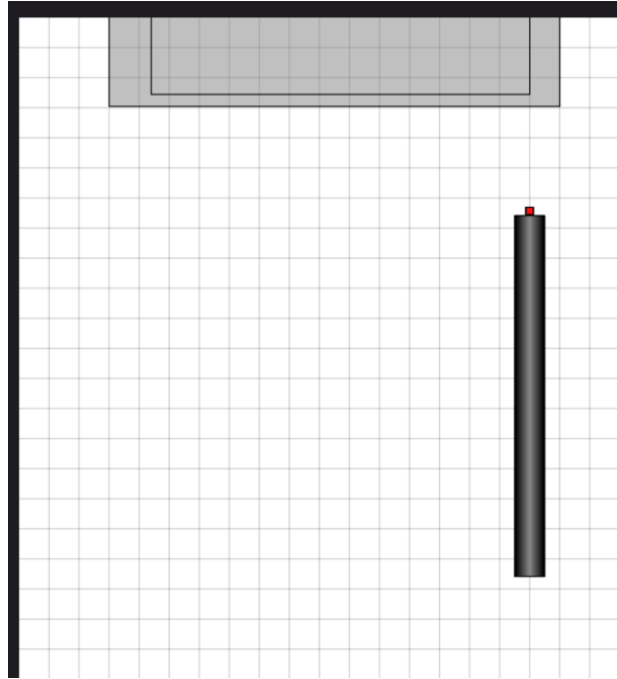
식 (2)로부터  $B_w$  대  $\frac{1}{x^3}$  그래프는 원점을 지나는 직선이다. 쌍극자 모멘트의 크기는 기울기에서 구할 수 있다.

## A.2 (계속)

 $B_w$  대  $\frac{1}{x^3}$  그래프그래프의 기울기:  $4.00 \times 10^{-7} \text{ N m}^2/\text{A}$ 자석의 쌍극자 모멘트:  $2.00 \text{ A m}^2$

**B.1** (0.3 pt)

스마트폰을 돌려서 아래와 같이 자석과 관을 스마트폰의 너비 방향으로 정렬한다.



자석이 자력계의 원점에서 거리  $x_0$  만큼 떨어진 곳에 정지해 있는 경우를 생각하자. 자석을 관의 축을 따라 놓아 준다. 자석은 관을 따라 내려가기 시작한다. 관의 전도성 구간에서는 짧은 가속 운동 뒤에 맴돌이 전류 감쇠 때문에 자석이 종단 속도  $v$  에 이른다. 이때 자력계가 재는 자기장  $B_w$  는 시간  $t$  에 따라 다음과 같이 변한다.

$$B_w(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(x_0 + vt)^3} \quad (3)$$

식 (3)을 정리하면

$$\left( \frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)} \right)^{1/3} = vt + x_0 \quad (4)$$

## B.1 (계속)

얻어진 자기장-시간 곡선은 자석 운동의 서로 다른 세 국면(AB, BC, CD)을 뚜렷이 보여 준다(아래 그림 4 참조).

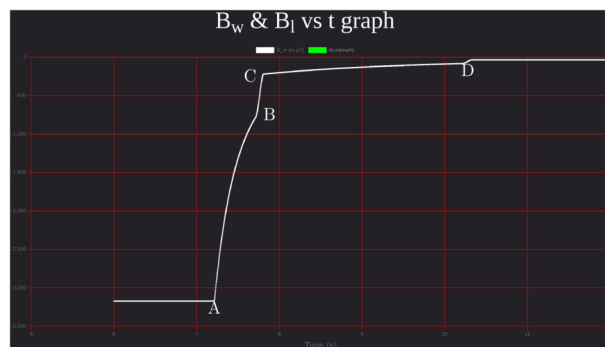


그림 (4)

세 국면 모두에 대해  $(B_w, t)$  자료를 모아 식 (4)에 따라 그린다. 관의 가속 구간(나무 구간)에서는 그래프가 직선이 아니고, 자석이 종단 속도로 움직이는 전도성 구간(Al과 Cu)에서는 그래프가 직선이 된다. 전도성 구간에서 종단 속도에 이르기 전의 가속 운동 시간은 무시할 수 있다.

다음 소문항의 그래프들로부터 다음을 분명히 알 수 있다.

| 구간   | 구간 번호 |
|------|-------|
| 알루미늄 | 1     |
| 구리   | 3     |
| 나무   | 2     |

구리가 알루미늄보다 전도도가 크므로 Cu 구간에서의 종단 속도가 Al 구간보다 작다.

## B.2 (2.6 pt)

알루미늄 구간에서 자석의 종단 속도:

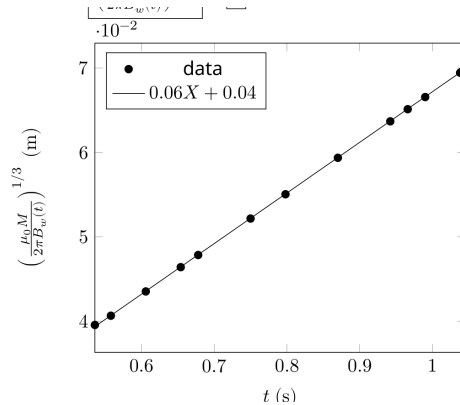
알맞은 양을 채워 넣으라.

| 번호 | $B_w$ ( $\mu\text{T}$ ) | $t$ (s) | $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$ (m) | $v$ (m/s) |
|----|-------------------------|---------|------------------------------------------------------|-----------|
| 1  | 6462.28                 | 0.534   | 0.0396                                               | 0         |
| 2  | 6462.28                 | 0.536   | 0.0396                                               | 0.01      |
| 3  | 5954.24                 | 0.558   | 0.0407                                               | 0.06      |
| 4  | 4850.05                 | 0.606   | 0.0435                                               | 0.06      |
| 5  | 4002.02                 | 0.654   | 0.0464                                               | 0.06      |
| 6  | 3651.48                 | 0.678   | 0.0478                                               | 0.06      |
| 7  | 2817.43                 | 0.75    | 0.0522                                               | 0.06      |
| 8  | 2397.97                 | 0.798   | 0.055                                                | 0.06      |
| 9  | 1911.68                 | 0.87    | 0.0594                                               | 0.06      |
| 10 | 1548.47                 | 0.942   | 0.0637                                               | 0.06      |
| 11 | 1448.01                 | 0.966   | 0.0651                                               | 0.06      |
| 12 | 1356.06                 | 0.99    | 0.0666                                               | 0.06      |
| 13 | 1194.26                 | 1.038   | 0.0694                                               | 0.06      |
| 14 | 1188.09                 | 1.04    | 0.0696                                               | 0.14      |
| 15 | 1142.95                 | 1.05    | 0.071                                                |           |

속도 ( $v$ ) 열은 전진 차분  $\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$  으로 구한다.

식 (4)로부터  $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$  대  $t$  그래프는 직선이 된다. 직선의 기울기가 종단 속도를 준다.

## B.2 (계속)

 $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$  대  $t$  그래프


그래프의 기울기: 6 cm/s.

알루미늄 구간에서 자석의 종단 속도: 6 cm/s

## 알루미늄 구간의 길이:

그래프의 기울기: 쓰지 않음    그래프의 절편: 쓰지 않음

위 표의 넷째 열의 값은 실제로 자력계로부터 자석까지의 거리를 나타낸다. 전진 차분법으로 자석의 속도(다섯째 열)를 계산한다. 자기장이 0.536 s에서 변하기 시작함에 유의하라. 따라서 이때가 자석이 내려가기 시작하는 시점이다. 자석은 곧 6 cm/s의 종단 속도에 이른다. ( $v$  대  $t$  곡선을 그렸다면 평평한 선에서 벗어나는) 속도의 변화가 1.040 s에서 일어난다. 이는 이때 자석이 관의 알루미늄 구간을 빠져나갔음을 뜻한다.

알루미늄 구간의 길이 =  $(1.040 - 0.536) \times 6 \text{ cm} = 3.024 \text{ cm}$ .

**B.3** (2.2 pt)

구리 구간에서 자석의 종단 속도:

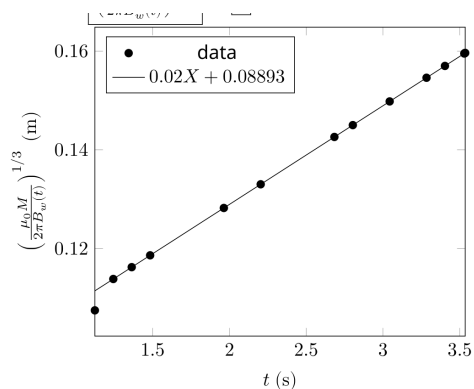
알맞은 양을 채워 넣으라.

| 번호 | $B_w$ ( $\mu\text{T}$ ) | $t$ (s) | $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$ (m) | $v$ (m/s) |
|----|-------------------------|---------|------------------------------------------------------|-----------|
| 1  | 338.23                  | 1.122   | 0.106                                                | 0.85      |
| 2  | 322.39                  | 1.124   | 0.1075                                               | 0.87      |
| 3  | 271.32                  | 1.244   | 0.1138                                               | 0.02      |
| 4  | 254.86                  | 1.364   | 0.1162                                               | 0.02      |
| 5  | 239.70                  | 1.484   | 0.1186                                               | 0.02      |
| 6  | 189.79                  | 1.964   | 0.1282                                               | 0.02      |
| 7  | 169.97                  | 2.204   | 0.1330                                               | 0.02      |
| 8  | 137.91                  | 2.684   | 0.1426                                               | 0.02      |
| 9  | 131.17                  | 2.804   | 0.1450                                               | 0.02      |
| 10 | 118.96                  | 3.044   | 0.1498                                               | 0.02      |
| 11 | 108.22                  | 3.284   | 0.1546                                               | 0.02      |
| 12 | 103.34                  | 3.404   | 0.1570                                               | 0.02      |
| 13 | 98.52                   | 3.53    | 0.1595                                               | 0.02      |
| 14 | 98.44                   | 3.532   | 0.1596                                               | 0.02      |
| 15 | 98.37                   | 3.534   | 0.1596                                               | 0.02      |
| 16 | 98.30                   | 3.536   | 0.1597                                               | 0.05      |
| 17 | 98.22139                | 3.538   | 0.1597                                               |           |

속도 ( $v$ ) 열은 전진 차분  $\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$  으로 구한다.

식 (4)로부터  $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$  대  $t$  그래프는 직선이 된다. 직선의 기울기가 종단 속도를 준다.

## B.3 (계속)

 $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$  대  $t$  그래프


그래프의 기울기: 2 cm/s.

구리 구간에서 자석의 종단 속도: 2 cm/s

## 구리 구간의 길이:

그래프의 기울기: 쓰지 않음    그래프의 절편: 쓰지 않음

관의 구리 구간의 길이는  $v_c t_c$  로 계산할 수 있다. 여기서  $v_c$  는 관의 구리 구간에서 자석의 종단 속도이고  $t_c$  는 자석이 구리 구간에 머문 시간이다.

위 표의 자료는 자석이 1.124 s에 구리 구간으로 들어가고, 속도가 갑자기 바뀌는 3.536 s에 구리 구간을 빠져나감을 보여 준다.

구리 구간의 길이 =  $(3.536 - 1.124) \times 2$  cm = 4.824 cm.

## B.4 (1.6 pt)

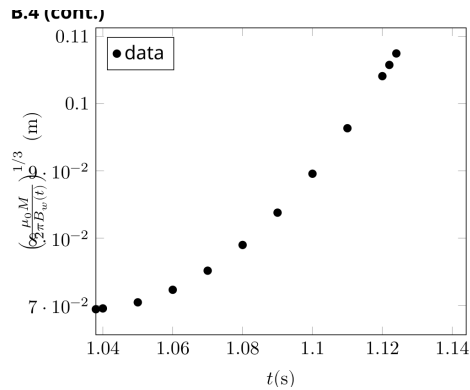
나무 구간의 길이:

알맞은 양을 채워 넣으라.

| 번호 | $B_w$ ( $\mu\text{T}$ ) | $t$ (s) | $\left(\frac{\mu_0 M}{2\pi B_w(t)}\right)^{1/3}$ (m) | $v$ (m/s) | $a$ ( $\text{m/s}^2$ ) |
|----|-------------------------|---------|------------------------------------------------------|-----------|------------------------|
| 1  | 1194.26                 | 1.038   | 0.0694                                               | 0.06      | 4                      |
| 2  | 1188.09                 | 1.04    | 0.070                                                | 0.14      | 5.66                   |
| 3  | 1142.95                 | 1.05    | 0.071                                                | 0.15      | 9.8                    |
| 4  | 1056.94                 | 1.06    | 0.072                                                | 0.25      | 9.8                    |
| 5  | 941.55                  | 1.07    | 0.075                                                | 0.34      | 9.8                    |
| 6  | 811.40                  | 1.08    | 0.079                                                | 0.44      | 9.8                    |
| 7  | 679.75                  | 1.09    | 0.084                                                | 0.54      | 9.8                    |
| 8  | 556.44                  | 1.1     | 0.090                                                | 0.64      | 9.8                    |
| 9  | 447.31                  | 1.11    | 0.096                                                | 0.74      | 9.8                    |
| 10 | 354.74                  | 1.12    | 0.104                                                | 0.83      | 9.8                    |
| 11 | 338.23                  | 1.122   | 0.106                                                | 0.85      | -334.92                |
| 12 | 322.39                  | 1.124   | 0.108                                                | 0.18      | 0.31                   |
| 13 | 271.32                  | 1.244   | 0.114                                                |           |                        |

속도 ( $v$ ) 열과 가속도 ( $a$ ) 열은 각각 전진 차분  $\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$  과  $\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}$  으로 구한다.

## B.4 (계속)



나무 구간은 관의 가운데 구간이다. AI 구간에서 자석이 1.040 s에 AI 구간을 빠져나감을 이미 확인했다. 이 구간에 대해 속도-시간 자료를 표로 만든다. 자석의 속도가 1.124 s에서 갑자기 떨어짐에 유의하라. 이 순간 자석이 관의 구리 구간으로 들어가 맴돌이 전류에 의한 감쇠를 받게 된다.

관의 길이는  $\left(v_{AI}t_w + \frac{gt_w^2}{2}\right)$ 로 계산할 수 있다. 여기서  $v_{AI}$ 은 관의 알루미늄 구간에서 자석의 종단 속도이고  $t_w$ 는 자석이 나무 구간에 머문 시간이다.

자석이 나무 관에 머문 전체 시간 ( $t_w$ ) =  $(1.124 - 1.040)$  s = 0.084 s

관의 나무 구간의 길이 = 3.96 cm

EQ2: 음향 블랙박스 풀이<sup>1</sup>

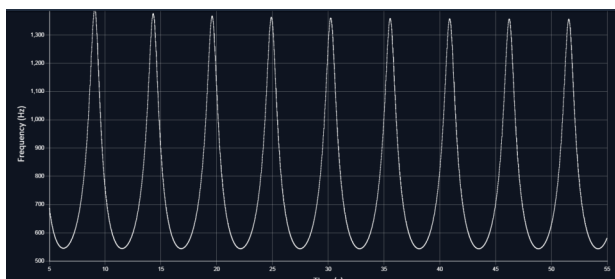
A.1 (0.2 pt)

$$x(t) = v_s t \cos(\beta) + R \cos(\omega t + \phi) + X_C \quad (1)$$

$$y(t) = v_s t \sin(\beta) + R \sin(\omega t + \phi) + Y_C \quad (2)$$

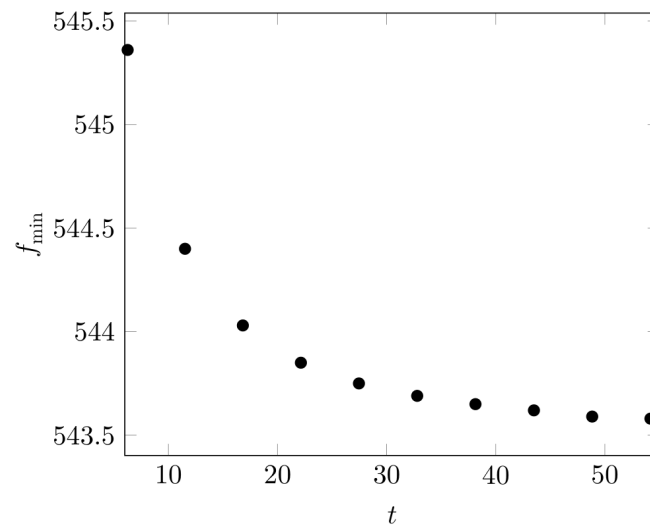
A.2 (1.2 pt)

아래 그림은 자료점 간격 0.02로 얻은 그래프이다.



| 번호 | $t$ (s) | $f_{\min}$ |
|----|---------|------------|
| 1  | 6.26    | 545.36     |
| 2  | 11.52   | 544.4      |
| 3  | 16.82   | 544.03     |
| 4  | 22.14   | 543.85     |
| 5  | 27.46   | 543.75     |
| 6  | 32.8    | 543.69     |
| 7  | 38.14   | 543.65     |
| 8  | 43.5    | 543.62     |
| 9  | 48.84   | 543.59     |
| 10 | 54.18   | 543.58     |

<sup>1</sup> Siddharth Tiwary(IIT 파와이 뭄바이), Siddhant Mukherjee(영국 케임브리지 대학교), Chandan Relekar(IISc 방갈로르), Charudutt Kadolkar(IIT 구와하티), Praveen Pathak(HBCSE-TIFR 뭄바이)가 이 문제의 주 저자이다. 학술위원회와 국제이사회의 기여에 감사드린다.

**A.2 (계속)**

**A.3** (1.0 pt)

검출기와 음원이 각각 속도  $v_d$  와  $v_s$  로 움직이는 일반적인 경우를 생각하자. 또한 음원과 검출기를 잇는 직선은 문제의 그림 1에서 정의한 대로  $x$  축과 각  $\alpha$  를 이룬다.

$\alpha$  는 시간의 함수임에 유의하라.  $\hat{n}$  을 음원과 검출기를 잇는 벡터라 하자. 음원이 검출기에 가까워지는 경우 검출기가 검출하는 진동수는 다음과 같다.

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cdot \hat{n}(t)}{c - \vec{v}_T \cdot \hat{n}(t)} \quad (3)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [(\vec{v}_s + R\omega\hat{\theta}) \cdot \hat{n}(t)]} \quad (4)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha(t))}{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) + R\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2 - \alpha))] } \quad (5)$$

$$= f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha)}{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t)))]} \quad (6)$$

마찬가지로 음원이 검출기에서 멀어지는 경우에는

$$f(t') = f_0 \frac{c - v_d \cos(\gamma - \alpha)}{c + [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t)))]} \quad (7)$$

점근 극한( $t \rightarrow \infty$ )에서 최소 진동수의 식은

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + [(v_s + R\omega)]} \quad (8)$$

**A.4** (1.4 pt)

음원의 처음 위치: 검출기를 먼저  $x$  축 위(예:  $x_1, 0^\circ$ )에 두고, 다음으로  $y$  축 위(예:  $y_1, 90^\circ$ )에 두어, 그래프에서 첫 신호가 검출기에 도달하는 데 걸린 시간을 읽는다. 이 시간을 각각  $\Delta t_{x1}$  과  $\Delta t_{y1}$  이라 하자. 그러면

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (c\Delta t_{x1})^2 \quad (9)$$

$$x^2 + (y - y_1)^2 = (c\Delta t_{y1})^2 \quad (10)$$

위 두 식을 풀면 음원의 좌표를 얻는다. 모의실험에서  $x_1 = y_1 = 500 \text{ m}$  일 때  $\Delta t_{x1} = 1.5344 \text{ s}$ ,  $\Delta t_{y1} = 1.2727 \text{ s}$  이다. 위 식들은 두 개의 해를 갖는다. 검출기를 세 번째 위치에 두면 옳은 쌍을 고를 수 있다.  
답은

$$x_A = 419.99, \quad y_A = 499.99$$

**A.5** (2.1 pt)

음원이 아주 먼 거리에서(예를 들어 왼쪽에서) 검출기로 다가와 지나친 뒤 아주 먼 거리(오른쪽)로 멀어지는 위치에 검출기를 두자. 접근 극한(아주 먼 왼쪽과 아주 먼 오른쪽,  $\beta \approx \alpha$ )에서 검출기는 두 쌍의 진동수를 검출한다.  $v_d = 0$  으로 둔다. 아주 먼 왼쪽에서

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c - (v_s + \omega R)} \quad (11)$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c - (v_s - \omega R)} \quad (12)$$

아주 먼 오른쪽에서

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c + (v_s - \omega R)} \quad (13)$$

$$f_{\min} = f_0 \frac{c}{c + (v_s + \omega R)} \quad (14)$$

식 (11)과 (12)로부터

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c - v_s}{\omega R} \quad (15)$$

식 (13)과 (14)로부터

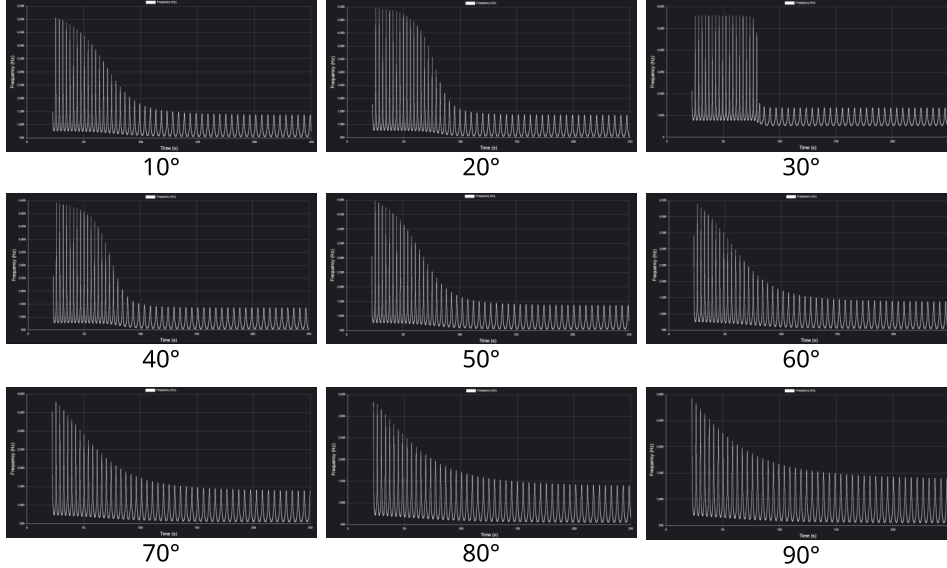
$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{c + v_s}{\omega R} \quad (16)$$

또한  $t = 0$  에서 음원과 검출기 사이에 유한한 거리가 있다고 주어져 있다. 이 때문에 신호 지연이 생긴다. 두 봉우리( $f_{\max}$ ) 사이의 시간 간격을  $\Delta t$  라 하면 이 경우

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 + \frac{v_s}{c} \right) \quad (17)$$

식 (15)–(17)을 함께 풀면  $v_s$ ,  $\omega$ ,  $R$  의 값을 얻을 수 있다. 정지한 검출기를, 음원이 아주 먼 거리에서 다가와 지나친 뒤 아주 먼 거리로 멀어지는 좌표(예:  $x_D, y_D$ )에 두어야 한다. 점근적 거동은 그래프에서 극값이 거의 일정하게 유지되는 영역에서 알아볼 수 있음에 유의하라. 또한 검출기의 원점으로부터의 거리가 각  $\alpha \approx \beta$  가 되게 하는 값이면 그래프가 급격히 변할 것으로 예상된다. 거리를 8000 m로 고정하고 여러  $\theta$  값을 시도해 본다.

## A.5 (계속)



$\theta = 30^\circ$  에서 그래프의 아주 먼 왼쪽과 오른쪽 부분이 점근적 거동을 보임을 알 수 있다. 이 영역에서는 봉우리 진동수가 눈에 띄게 변하지 않는다. 이 영역에서 그래프 왼쪽의 봉우리 진동수 값이 오른쪽의 값보다 큼에 유의하라. 이는 그래프 오른쪽에서 음원이 검출기로부터 멀어지고 있음을 뜻한다. 검출기는 전이 영역 어딘가에 놓여 있다. 더 정확한  $f_{\max}$  와  $f_{\min}$  값을 얻기 위해 자료점 간격을 줄여(예: 0.001) 아주 먼 왼쪽 영역의 그래프를 확대한다.

$f_{\min} = 788.24 \text{ Hz}$ ,  $f_{\max} = 5569.59 \text{ Hz}$  이다. 이를 식 (11)에 넣으면

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 1.33 = \frac{c - v_s}{\omega R} \quad (18)$$

아주 먼 오른쪽 영역에서는

$f_{\min} = 543.96 \text{ Hz}$ ,  $f_{\max} = 1353.45 \text{ Hz}$  이다. 이를 식 (12)에 넣으면

$$\frac{f_{\max} + f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} = 2.34 = \frac{c + v_s}{\omega R} \quad (19)$$

식 (18)-(19)로부터  $v_s = 91.1 \text{ m/s}$ ,  $\omega R = 179.66 \text{ m/s}$  를 얻는다. 또한 점근 영역의 임의의 두 봉우리에 대해

$$\Delta t = 148.84 - 143.48 = 5.36 = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \quad (20)$$

$v_s = 91.1 \text{ m/s}$  를 써서  $\omega = 1.49 \text{ rad s}^{-1}$  을 얻는다.  $\omega R = 179.66 \text{ m/s}$  로부터  $R = 120.57 \text{ m}$  이다.  $f_0$  를 얻으려면 아주 먼 오른쪽에서  $f_{\min} = 5327.82 \text{ Hz}$  를 식 (8)에 넣어  $f_0$  에 대해 풀면 된다. 이로부터  $f_0 = 990.26 \text{ Hz}$  를 얻는다.

## A.5 (계속)

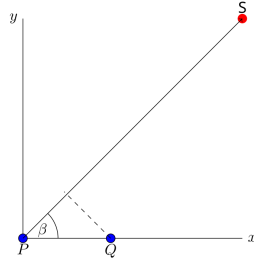
| $f_0$ (Hz) | $\omega$ (s <sup>-1</sup> ) | $R$ (m)  | $v_S$ (m/s) |
|------------|-----------------------------|----------|-------------|
| 990.26 Hz  | 1.49 s <sup>-1</sup>        | 120.57 m | 91.1 m/s    |

## A.6 (2.0 pt)

 $\beta$ 의 계산

아래 그림은 개략도로, S는 아주 먼 거리에 있는 음원이다. P와 Q는 서로 다른 시각에 놓인 검출기의 두 위치를 나타낸다.

represent two different positions of detectors placed at different instants.



먼 거리에서 소리 신호가 검출기 P에 도달하는 데 걸린 시간을  $t_0 = 1009.61$ , 검출기 Q에 도달하는 데 걸린 시간을  $t_1 = 1007.85$ 라 하자.

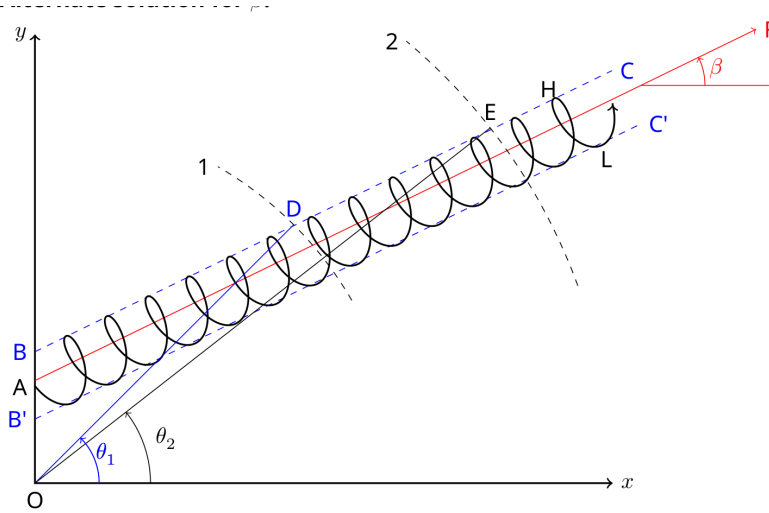
검출기 P와 검출기 Q 사이의 거리는 660 m이고 소리가 각 검출기에 도달하는 데 걸린 시간은 각각 1009.61 s와 1007.85 s이다. 시간 차의 식은 다음과 같다.

$$t_0 - t_1 = \frac{PQ \cos(\beta)}{c} \quad (21)$$

$$\cos(\beta) = \frac{(t_0 - t_1)c}{PQ} \quad (22)$$

이로부터  $\beta = 28.36^\circ$ 를 얻는다.

## A.6 (계속)

 $\beta$ 에 대한 다른 풀이:

빨간 선 AF는 원의 속도  $\vec{v}_s$ 의 방향을 나타낸다.  $\vec{v}_s$ 가  $x$ 축과 이루는 각  $\beta$ 를 구하는 것이 목표이다.

검출기가 검출하는 진동수 값은 두 가지에 의존한다. 첫째는 사이클로이드 위의 어느 위치에서 음원이 신호를 냈는 가이고, 둘째는 검출기의 위치이다.

음원 궤적의 한 주기에서 점 H와 L은 각각 음원의 속력이 최대와 최소가 되는 위치를 나타낸다. 이는 이 점들에서  $\vec{v}_s$ 가 회전의 접선 속도 성분과 나란하거나 반대 방향이기 때문이다.

음원이 사이클로이드 위에서  $n$ 번째 회전을 할 때, 원호 1 위의 여러 각 위치에 놓인 검출기는 그 위치에 대응하는 서로 다른  $f_{\max}$  값을 검출한다.  $x$ 축 근처의 각 위치( $0^\circ$ )에서 시작하면, 검출기가  $(\theta_1)$ 의 점 D에 놓일 때까지  $f_{\max}$ 가 계속 커진다. 실제로 AF에 나란한 직선 BC 위의 어느 위치에서든 검출기는 모든  $f_{\max}$  중 최대를 검출한다. 마찬가지로 검출기를 역시 AF에 나란한 직선  $B'C'$  위의 어디에든 놓으면  $f_{\min}$  중 최소를 검출한다. 모의실험에서는 속도를 0으로 두고  $x, y$  좌표를 바꾸어 각을 바꿀 수 있다.

검출기의 거리를 원호 2로 바꾸어 이 과정을 되풀이한다. 원호를 훑으면서 검출기가  $f_{\max}$  중 최대를 검출하는 각  $\theta_2$ 를 얻을 수 있다.

각 위치  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 를 정하고 나면, 점 D와 E의 좌표를 이용해 선분 DE가  $x$ 축과 이루는 각을 계산할 수 있다. 이것 이 각  $\beta$ 이다. 점 D와 E의 좌표를 각각  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면

$$\beta = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (23)$$

**A.6** (계속)

이 과정을 아래 표와 그에 대응하는 그래프로 나타내었다. 먼저 검출기를 원점에서 8000 m 떨어진 곳에 두고 각 위치  $0^\circ$ – $90^\circ$ 에 대응하도록 좌표를 바꾼다. 고정된 어떤 주기(여기서는 10번째)에 대해  $f_{\max}$  를 기록한다.  $f_{\max}$  대  $\theta$  그래프에서  $\theta_1$  이  $25^\circ$ – $35^\circ$  사이임을 알 수 있다.

| $\theta$ | $f_{\min}$ | $f_{\max}$ |
|----------|------------|------------|
| 5        | 676.08     | 2670.30    |
| 10       | 722.99     | 3620.51    |
| 20       | 763.49     | 4957.28    |
| 30       | 781.46     | 5478.86    |
| 40       | 753.98     | 4032.21    |
| 50       | 711.98     | 3007.44    |
| 60       | 677.39     | 2486.46    |
| 70       | 651.25     | 2185.81    |
| 80       | 630.99     | 1987.99    |
| 90       | 614.68     | 1845.65    |

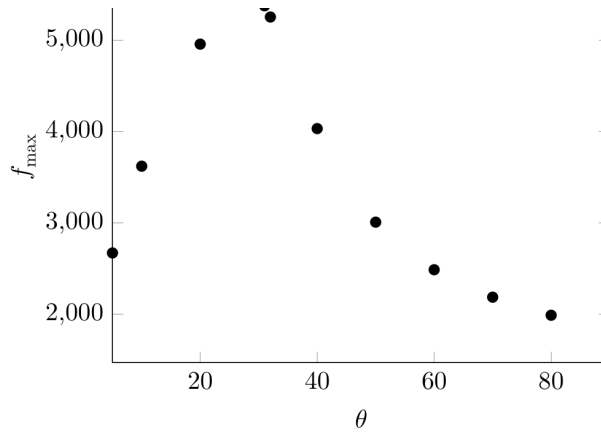
## A.6 (계속)

$\theta_1$  을 더 정확히 정하기 위해 더 작은 간격으로 살펴본다. 아래는  $25^\circ$ – $35^\circ$  사이의 변화에 대한 표와 그래프이다.

| $\theta$ | $f_{\min}$ | $f_{\max}$ |
|----------|------------|------------|
| 25       | 777.95     | 5538.23    |
| 26       | 779.67     | 5589.40    |
| 26.9     | 780.80     | 5609.15    |
| 27       | 780.90     | 5609.74    |
| 27.3     | 781.18     | 5609.546   |
| 27.5     | 781.33     | 5607.78    |
| 28       | 781.62     | 5597.66    |
| 29       | 781.81     | 5553.37    |
| 30       | 781.46     | 5478.86    |
| 31       | 780.58     | 5377.65    |
| 32       | 779.17     | 5254.35    |

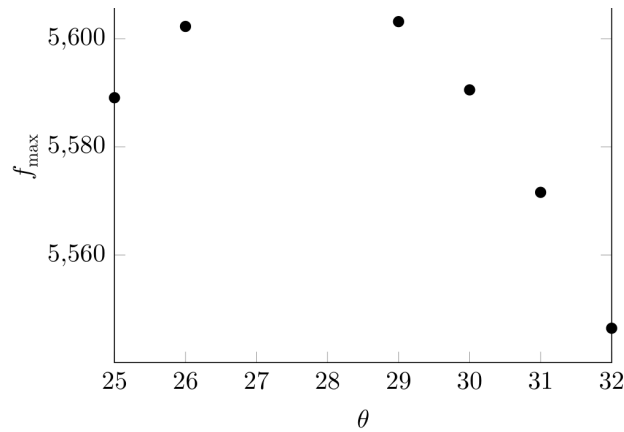
표와 그래프로부터  $\theta_1 = 27^\circ$  임이 분명하다. 다른 거리 16000 m에 대해서도 이를 되풀이한다. 이 거리에 대한 표와 그래프는 아래와 같다.

## A.6 (계속)



| $\theta$ | $f_{\min}$ | $f_{\max}$ |
|----------|------------|------------|
| 25       | 781.12     | 5589.093   |
| 26       | 781.47     | 5602.27    |
| 27       | 781.70     | 5609.05    |
| 27.4     | 781.76     | 5609.95    |
| 27.5     | 781.77     | 5610.01    |
| 28       | 781.81     | 5609.34    |
| 29       | 781.80     | 5603.16    |
| 30       | 781.66     | 5590.544   |
| 31       | 781.41     | 5571.60    |
| 32       | 781.04     | 5546.48    |

## A.6 (계속)



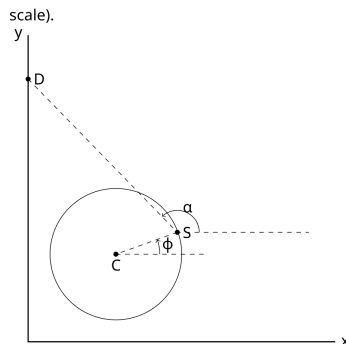
이로부터  $\theta_2 = 27.5^\circ$  를 얻는다. 이에 대응하는  $x_1, y_1, x_2, y_2$  값을 쓰고 식 (23)을 이용하면

$$\beta = \arctan \frac{7468.77 - 3631.92}{14192.17 - 7128.052194} = 28.5^\circ \quad (24)$$

## A.7 (2.1 pt)

## 원의 중심 좌표

이 문항에서는 검출기를 어떤 고정된 위치, 예를 들어  $y$  축 위에 둔다. 음원의 처음 위치와 검출기의 개략도가 아래 그림에 나타나 있다(그림은 실제 비율이 아니다).



음원이 보낸 첫 신호의 검출 진동수를 기록한다.  $R$  값과 음원의 처음 좌표는 이미 알고 있다. 검출기를  $y$  축 위 500 m에 두면  $t = 0$  에서 검출되는 진동수, 즉 첫 신호는 795.69 Hz이다. 음원의 좌표  $(419.99, 499.99)$  m를 쓰면

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{0}{419.99} \quad (25)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad (26)$$

검출 진동수와  $\alpha$  값을 식 (7)에 넣으면

$$795.69 = \frac{990.26 \times 330}{330 - 91.1 \cos(28.5 - 180) + 179.66 \sin(\phi - \alpha)} \quad (27)$$

$$\Rightarrow \phi \approx 0^\circ \quad (28)$$

이로부터 음원이 도는 원의 중심 좌표는  $(299.42, 499.99)$  m이다.